Гантель

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 10 класс, задача 1] «Гантель».

На гладком горизонтальном столе лежит гантель, состоящая из двух маленьких по размеру шайб, имеющих массы m_1 и m_2, соединённых лёгким жёстким (деформации стержня малы по сравнению с его размерами) стержнем длины L. В момент времени $t = 0$ на шайбу с массой m_1 начинает действовать постоянная по величине горизонтальная сила F. Направление действия силы всегда составляет один и тот же острый угол α со стержнем (рис. 4). Считайте известным, что при таком движении угловое ускорение стержня является постоянным.

В некоторый момент времени τ после начала действия силы стержень на мгновение оказался не напряжённым (то есть ни сжатым, ни растянутым).

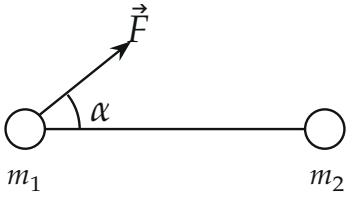

Рис. 4

1. Найдите угловую скорость ω вращения стержня в момент времени τ.
2. Найдите угловое ускорение стержня $d\omega/dt$.
3. Чему равен промежуток времени τ?
4. Найдите угол поворота стержня к моменту времени τ.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «вращение твёрдого тела + относительное движение». Сила F всё время повёрнута к стержню под одним углом, поэтому поворачивает его с постоянным угловым ускорением и одновременно сжимает. По мере раскрутки шайбе m_1 нужно всё больше центростремительного ускорения относительно m_2; сначала его с избытком даёт продольная составляющая силы (стержень сжат), потом

с недостатком (стержень растянут). В промежуточный момент продольная составляющая F даёт ровно нужное — стержень не напряжён.

Обозначения. T — сила, с которой стержень тянет каждую шайбу к другой ($T > 0$ — растяжение, $T < 0$ — сжатие); $\beta = d\omega/dt$; ось r — вдоль стержня от m_1 к m_2, ось n — перпендикулярно ему (рис. 5); C — центр масс.

1. Силы. На m_1 действуют $\vec{F}$ и сила стержня T вдоль оси r; на m_2 — только сила стержня T, направленная к m_1 (лёгкий стержень действует на шайбы вдоль себя и с равными силами). Сила тяжести и реакция стола уравновешены, трения нет. Раскладываем $\vec{F}$ на оси: $F_r = F\cos\alpha$ (к m_2), $F_n = F\sin\alpha$.

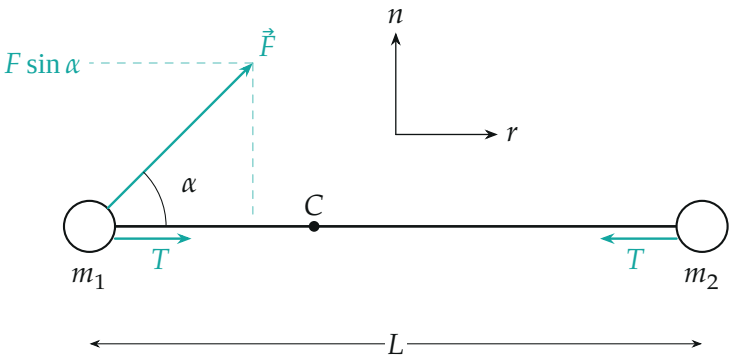

Рис. 5. Силы, действующие на шайбы в плоскости стола. T показаны для растянутого стержня, C — центр масс гантели, оси r и n поворачиваются вместе со стержнем.

Пункт 2.

2. Угловое ускорение — из уравнения моментов. Центр масс C делит стержень так, что m_1 на расстоянии $\dfrac{m_2 L}{m_1 + m_2}$ от него, m_2 — на расстоянии $\dfrac{m_1 L}{m_1 + m_2}$. Уравнение динамики вращения относительно C (оно справедливо относительно центра масс, даже если тот движется с ускорением). Силы стержня направлены через C и момента не дают; момент

создаёт только $F\sin\alpha$:

$$I_C\beta = F\sin\alpha\cdot\frac{m_2L}{m_1+m_2},$$

$$I_C = m_1\left(\frac{m_2L}{m_1+m_2}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1L}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{m_1m_2L^2}{m_1+m_2}.$$

$$\beta = \frac{F\sin\alpha}{m_1L}.$$

Момент силы от времени не зависит — угловое ускорение действительно постоянно, как и сказано в условии.

3. Второй способ — в самом начале движения. При $t\to 0$ скорости нулевые, m_2 ещё не сдвинулась (её ускорение конечное, путь $\propto t^2$ поперёк стержня ей не набрать: поперечной силы на неё нет). Шайба m_1 поперёк стержня проходит $\dfrac{F\sin\alpha}{m_1}\dfrac{t^2}{2}$ (на неё поперёк действует только $F\sin\alpha$), стержень поворачивается на угол $\varphi = \dfrac{F\sin\alpha}{m_1L}\dfrac{t^2}{2} = \dfrac{\beta t^2}{2}$ — тот же ответ.

Пункт 1.

4. Условие «стержень не напряжён». Шайбы всё время на расстоянии L, поэтому в системе отсчёта, движущейся поступательно вместе с m_2, шайба m_1 идёт по окружности радиуса L с центром в m_2 (рис. 6). Проекция её ускорения на ось r (к центру окружности) равна ω^2L. Это ускорение относительное: $\vec{a}_1-\vec{a}_2$. Второй закон Ньютона для каждой шайбы в проекции на ось r:

$$m_1a_{1r} = F\cos\alpha + T, \qquad m_2a_{2r} = -T,$$

$$\omega^2L = a_{1r}-a_{2r} = \frac{F\cos\alpha}{m_1} + T\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

Отсюда сила стержня в любой момент:

$$T = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\omega^2L - \frac{F\cos\alpha}{m_1}\right). \qquad (1)$$

В момент τ $T = 0$:

$$\omega^2 L = \frac{F\cos\alpha}{m_1} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{F\cos\alpha}{m_1 L}}.$$

Смысл: в этот момент m_2 не ускоряется (сил на неё нет), а m_1 получает центростремительное ускорение относительно m_2 ровно от продольной составляющей силы F.

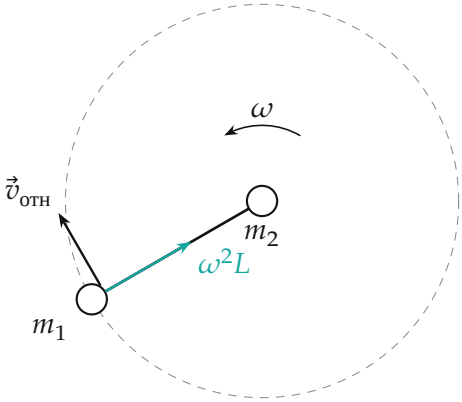

Рис. 6. В системе отсчёта, движущейся поступательно с шайбой m_2, шайба m_1 идёт по окружности радиуса L; центростремительная составляющая её ускорения — $\omega^2 L$.

Пункт 3.

5. Время. Начальная угловая скорость нулевая, угловое ускорение постоянно, значит, $\omega = \beta t$:

$$\tau = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{F\cos\alpha}{m_1 L}} \cdot \frac{m_1 L}{F\sin\alpha} = \sqrt{\frac{m_1 L\cos\alpha}{F\sin^2\alpha}}.$$

По формуле (1) $T(t) = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\beta^2 t^2 L - \dfrac{F\cos\alpha}{m_1}\right)$ — парабола (рис. 7): до τ стержень сжат, после — растянут.

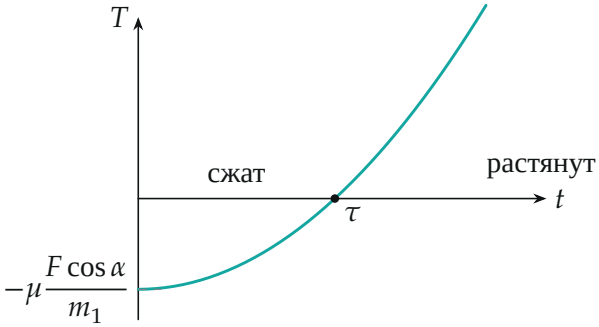

Рис. 7. Сила стержня от времени, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$: в момент τ она меняет знак.

Пункт 4.

6. Угол поворота. При постоянном угловом ускорении и нулевой начальной угловой скорости

$$\varphi = \frac{\beta\tau^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F\sin\alpha}{m_1 L}\cdot\frac{m_1 L\cos\alpha}{F\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}\ \text{(радиан)}.$$

Второй способ: $\omega^2 = 2\beta\varphi$, $\varphi = \dfrac{\omega^2}{2\beta} = \dfrac{F\cos\alpha}{m_1 L}\cdot\dfrac{m_1 L}{2F\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$. Например, при $\alpha = 45^\circ$ стержень повернётся на 0,5 рад $\approx 29^\circ$ (рис. 8).

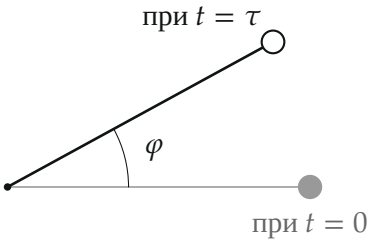

Рис. 8. Поворот направления стержня к моменту τ при $\alpha = 45^\circ$: $\varphi = 0{,}5$ рад (направления изображены из одной точки).

Обратите внимание. Нельзя писать уравнение моментов относительно шайбы m_2, как относительно неподвижной оси: она движется с ускорением, а момент сил инерции относительно неё не равен нулю. Относительно центра масс — можно.

Проверка. Размерности: $\dfrac{F}{m_1 L}$ — с^{-2}, значит, ω — с^{-1}, β — с^{-2}, $\tau = \sqrt{m_1 L/F}\cdot(\dots)$ — секунды; φ безразмерен. Пределы: $\alpha \to 90^\circ$ — продольной составляющей нет, стержень не напряжён сразу, $\tau \to 0$ и $\varphi \to 0$, как и даёт ответ; $\alpha \to 0$ — момента нет, $\beta \to 0$, стержень не закрутится и не станет ненапряжённым: $\tau \to \infty$.

Ни одна из величин не зависит от m_2: вращением управляет только сила на m_1, а момент «ненапряжённости» — сравнение ускорения m_1 с центростремительным.

Ответ. 1) $\omega = \sqrt{\dfrac{F\cos\alpha}{m_1 L}}$; 2) $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{F\sin\alpha}{m_1 L}$; 3) $\tau = \sqrt{\dfrac{m_1 L\cos\alpha}{F\sin^2\alpha}}$; 4) $\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}$ рад.