Поканальное движение

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 10 класс, задача 2] «Поканальное движение».

Небольшие частицы с одинаковыми массами m и зарядами q и $-q$ движутся без трения по пересекающимся под прямым углом узким прямым каналам, расположенным в горизонтальной плоскости (рис. 5). При этом оказалось, что в процессе дальнейшего движения расстояние R между частицами остаётся неизменным. Найдите суммарную кинетическую энергию частиц.

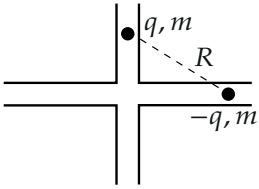

Рис. 5

▲ **Решение. Что происходит.** Задача класса «движение со связями под действием кулоновской силы». Каналы гасят поперечную часть силы притяжения, вдоль канала остаётся составляющая, пропорциональная расстоянию частицы до перекрёстка. При постоянном R это сила упругости: каждая частица — гармонический осциллятор с одной и той же частотой. Условие $R = \text{const}$ выделяет единственный вид движения — колебания со сдвигом на четверть периода; отсюда и энергия.

Обозначения. O — точка пересечения каналов; ось x — вдоль канала первой частицы $(-q)$, ось y — вдоль канала второй (q); x, y — их координаты (могут быть и отрицательными: частица может проскочить перекрёсток); $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

1. Геометрия. Частицы и точка O образуют прямоугольный треугольник с катетами $|x|$, $|y|$ и гипотенузой R (рис. 6), по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (1)$$

2. Сила вдоль канала. Сила притяжения Кулона $F = \dfrac{kq^2}{R^2}$ направлена от частицы к другой частице. Для частицы на оси y её проекция на ось y равна $-F\dfrac{y}{R}$ (косинус угла между силой и осью — y/R, знак минус: сила тянет к оси x). Поперечную проекцию уравновешивает сила реакции стенки канала, трения нет. Второй закон Ньютона в проекциях на оси каналов:

$$ma_y = -\frac{kq^2}{R^3}\,y, \qquad ma_x = -\frac{kq^2}{R^3}\,x. \qquad (2)$$

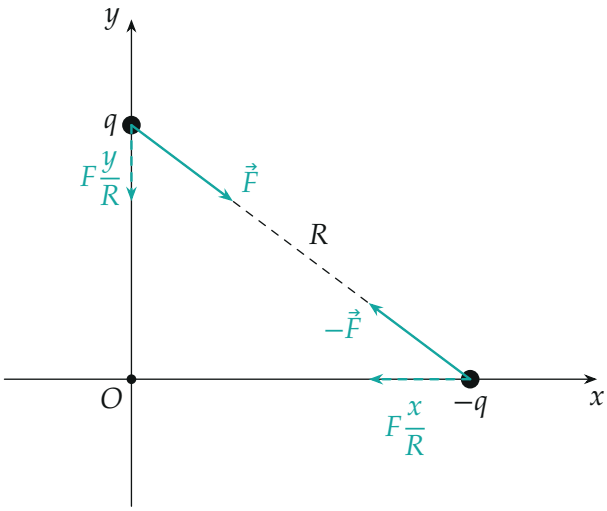

Рис. 6. Координаты частиц и силы притяжения; пунктиром — составляющие вдоль каналов, остальное гасит реакция стенок.

3. Каждая частица — осциллятор. Расстояние R постоянно, поэтому коэффициент $\dfrac{kq^2}{R^3}$ в (2) постоянен, и (2) — уравнения гармонических колебаний с одной и той же циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{kq^2}{mR^3}}.$$

Решения: $x = A\cos(\omega t + \varphi_1)$, $y = B\cos(\omega t + \varphi_2)$. Условие (1) должно

выполняться в любой момент:

$$A^2\cos^2(\omega t+\varphi_1)+B^2\cos^2(\omega t+\varphi_2)=R^2 \text{ при всех } t.$$

Это возможно, только если $A=B=R$ и колебания сдвинуты на четверть периода: $x=R\cos\omega t$, $y=R\sin\omega t$ (тогда $x^2+y^2=R^2(\cos^2+\sin^2)=R^2$). Графики — на рис. 7: когда одна частица на перекрёстке, другая в крайней точке.

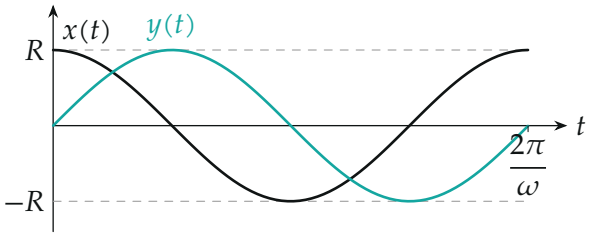

Рис. 7. Координаты частиц: колебания одной частоты со сдвигом на четверть периода.

4. Кинетическая энергия. Скорости частиц: $v_x=-R\omega\sin\omega t$, $v_y=R\omega\cos\omega t$, поэтому

$$E_{\text{кин}}=\frac{m(v_x^2+v_y^2)}{2}=\frac{mR^2\omega^2}{2}=\frac{mR^2}{2}\cdot\frac{kq^2}{mR^3}=\frac{kq^2}{2R}.$$

Она постоянна — как и требует закон сохранения энергии: потенциальная энергия $-kq^2/R$ не меняется.

5. Второй способ — «квазичастица». Введём воображаемую точку массы m с координатами $(x;y)$ (рис. 8). Её ускорение $(a_x;a_y)=-\dfrac{kq^2}{mR^3}(x;y)$ — направлено к O и равно по модулю $\dfrac{kq^2}{mR^2}$; её расстояние до O равно R по (1). Значит, точка равномерно движется по окружности радиуса R (скорость $v^2=v_x^2+v_y^2$ постоянна по закону сохранения энергии), и её ускорение центростремительное:

$$\frac{v^2}{R}=\frac{kq^2}{mR^2}\ \Rightarrow\ \frac{mv^2}{2}=\frac{kq^2}{2R}.$$

Проекции точки на оси — это и есть сами частицы.

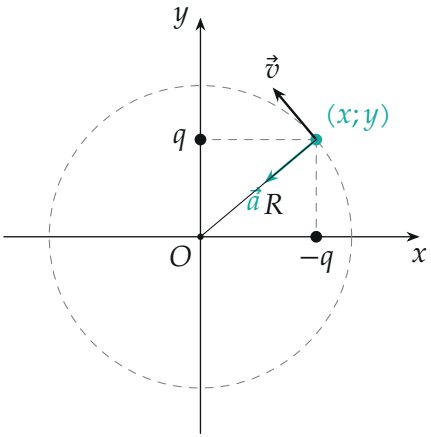

Рис. 8. «Квазичастица» $(x;y)$ движется по окружности радиуса R; её проекции на оси — реальные частицы.

Обратите внимание. Сумма кинетических энергий постоянна, но по отдельности они меняются: энергия перетекает от одной частицы к другой, как у двух проекций равномерного вращения.

Проверка. Размерность: $\dfrac{kq^2}{R}$ — энергия (потенциальная энергия зарядов). Знак и смысл: $E_{\text{кин}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{kq^2}{R}$ — половина модуля потенциальной энергии, как у спутника на круговой орбите или у электрона в модели Бора: это тоже равномерное движение по окружности под действием центральной силы $\propto 1/R^2$.

Связи-каналы превращают кулоновское притяжение в две одинаковые «пружины», и постоянное расстояние возможно только при движении «по кругу» в плоскости координат.

Ответ. $E_{\text{кин}} = \dfrac{kq^2}{2R} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$.