Архив лорда Кельвина

Задача 3. [ВсОШ 2018/19, 10 класс, задача 3] «Архив лорда Кельвина». В архиве лорда Кельвина нашли график циклического процесса, совершённого над фиксированным количеством одноатомного идеального газа (рис. 6). От времени чернила выцвели, и информация про направления некоторых процессов была утрачена. Также была утрачена и информация про то, что отложено по оси абсцисс. Известно лишь, что на оси абсцисс отложена одна из следующих величин: объём, давление, температура или плотность, а шкала выполнена в условных единицах. По оси ординат отложена молярная теплоёмкость газа C. Найдите максимально возможный КПД цикла.

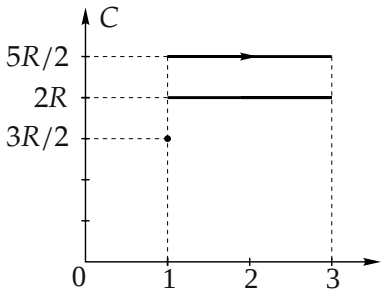

Рис. 6

▲ **Решение. Что происходит.** Цикл состоит из трёх процессов, у каждого теплоёмкость постоянна: $\frac{5}{2}R$, $2R$ и $\frac{3}{2}R$. По теплоёмкости узнаём сам процесс, по тому, что один из них на графике — точка, узнаём, что может стоять по оси абсцисс. Вариантов останется два; в каждом строим цикл в осях p, V и считаем КПД $\eta = A/Q_+$. Класс задачи — «цикл из процессов с известной теплоёмкостью».

Обозначения. ν — количество газа; C — молярная теплоёмкость; A — работа газа за цикл; Q_+ — теплота, полученная газом за цикл; V_0, p_0 — наименьшие объём и давление в цикле.

1. Что за процессы. Для одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$ (изохора) и $C_p = \frac{5}{2}R$ (изобара). Найдём процесс с $C = 2R$. Первое начало термо-

динамики для малого участка: $\delta Q = \frac{3}{2}\nu R\,dT + p\,dV$, а из уравнения Менделеева — Клапейрона $\nu R\,dT = p\,dV + V\,dp$. Тогда

$$C = \frac{\delta Q}{\nu\,dT} = R\,\frac{\frac{3}{2}(p\,dV + V\,dp) + p\,dV}{p\,dV + V\,dp} = 2R,$$

$$\frac{5}{2}p\,dV + \frac{3}{2}V\,dp = 2p\,dV + 2V\,dp \;\Rightarrow\; \frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}.$$

Отсюда $p = kV$: давление пропорционально объёму, на диаграмме p, V это отрезок прямой, идущей из начала координат.

2. Что по оси абсцисс. Изохора на графике — точка: за весь процесс абсцисса не меняется. В изохоре постоянны объём и плотность, а давление и температура меняются. Значит, по оси абсцисс отложен либо объём, либо плотность $\rho \propto 1/V$. Оба варианта разбираем по очереди (рис. 1).

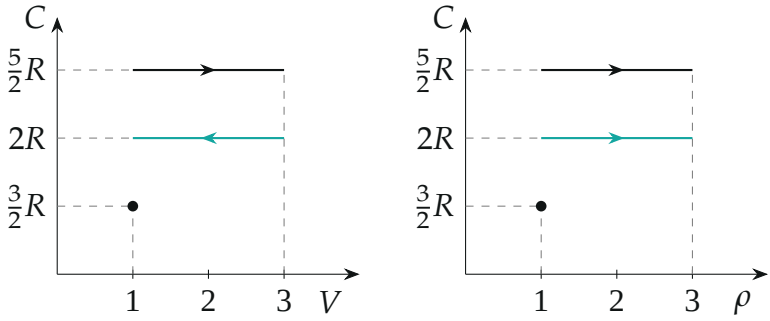

Рис. 1. Восстановленные направления: слева по оси абсцисс — объём, справа — плотность.

3. Абсцисса — объём. Изобара идёт по стрелке условия от 1 к 3: это расширение $V_0 \to 3V_0$. Изохора стоит при $x = 1$, т. е. при V_0. Прямая $p = kV$ соединяет конец изобары $(3V_0)$ с изохорой (V_0). Если изобара идёт при давлении p_0', то на прямой при V_0 давление втрое меньше: $p_0'/3$. Обозначим его p_0; тогда изобара — при $3p_0$. Цикл (рис. 2, слева): изохорный нагрев $(V_0, p_0) \to (V_0, 3p_0)$, изобарное расширение до $(3V_0, 3p_0)$, возврат по прямой $p = kV$. Обход по часовой стрелке — работа газа

положительна:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2V_0 \cdot 2p_0 = 2p_0V_0.$$

Тепло газ получает на изохоре и на изобаре (температура растёт, на изобаре газ ещё и расширяется); на прямой газ сжимается и остывает — отдаёт тепло:

$$Q_+ = \frac{3}{2}(3p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{5}{2}3p_0 \cdot 2V_0 = 3p_0V_0 + 15p_0V_0 = 18p_0V_0,$$

$$\eta_V = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

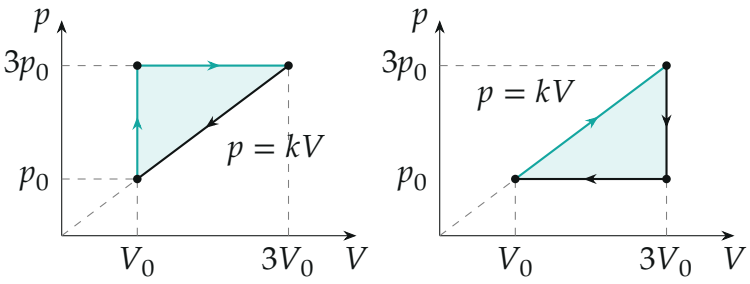

Рис. 2. Цикл в осях p, V: слева абсцисса — объём ($\eta = 1/9$), справа — плотность ($\eta = 1/8$). Бирюзой — участки, где газ получает тепло.

4. Абсцисса — плотность. Теперь стрелка изобары (от $\rho = 1$ к $\rho = 3$) означает сжатие: объём уменьшается втрое, $3V_0 \to V_0$. Изохора стоит при наименьшей плотности, т. е. при наибольшем объёме $3V_0$. Пусть изобара идёт при p_0; прямая $p = kV$ выходит из её левого конца (V_0, p_0) и при $3V_0$ даёт $3p_0$. Цикл (рис. 2, справа): изобарное сжатие $(3V_0, p_0) \to (V_0, p_0)$, расширение по прямой до $(3V_0, 3p_0)$, изохорное охлаждение обратно. Обход снова по часовой стрелке, площадь та же:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2V_0 \cdot 2p_0 = 2p_0V_0.$$

Тепло газ получает только на прямой: там он и расширяется, и нагревается (pV растёт в 9 раз); изобарное сжатие и изохорное охлаждение идут с отдачей тепла. По первому началу для участка прямой (работа —

площадь трапеции под ней):

$$Q_+ = \tfrac{3}{2}(9p_0V_0 - p_0V_0) + \frac{p_0 + 3p_0}{2}\cdot 2V_0 = 12p_0V_0 + 4p_0V_0 = 16p_0V_0,$$

$$\eta_\rho = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

Второй способ для Q_+: на прямой $C = 2R$, а $\nu R\,\Delta T = \Delta(pV) = 8p_0V_0$, поэтому $Q_+ = 2\cdot 8p_0V_0 = 16p_0V_0$ — то же.

Обратите внимание: при одной и той же площади цикла КПД разный — во втором случае газ получает тепло только на одном участке, и Q_+ меньше.

5. Наибольший КПД. Других вариантов нет: при $x = p$ или $x = T$ изохора не была бы точкой. Наибольший из двух КПД

$$\eta_{\max} = \eta_\rho = \frac{1}{8}.$$

Проверка. КПД безразмерен и меньше КПД цикла Карно между крайними температурами: $T_{\max}/T_{\min} = 9$, $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} > \frac{1}{8}$. На изохоре второго случая газ остывает от $9p_0V_0$ до $3p_0V_0$ — отдаёт тепло, как и предполагалось. Цикл при $x = \rho$ выгоднее потому, что подводимое тепло тратится сразу и на нагрев, и на работу расширения.

Ответ. $\eta_{\max} = \dfrac{1}{8}$ (по оси абсцисс — плотность газа; если там объём, $\eta = \dfrac{1}{9}$).