Заряженная пластинка

Задача 4. [ВсОШ 2018/19, 10 класс, задача 4] «Заряженная пластинка». Тонкая плоская пластинка из диэлектрика в форме ромба со стороной a и острым углом 60° заряжена однородно с поверхностной плотностью заряда σ. Потенциал в вершине острого угла ромба равен φ_1, в вершине тупого — φ_2 (рис. 7). Из такого же диэлектрика вырезают тонкую пластинку в форме равностороннего треугольника ABC со стороной $2a$ и заряжают её с такой же поверхностной плотностью заряда (рис. 8).

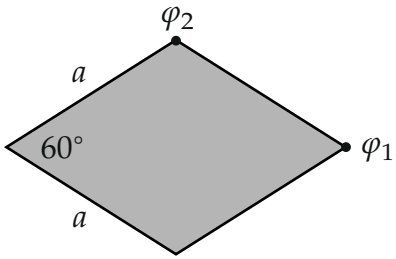

Рис. 7

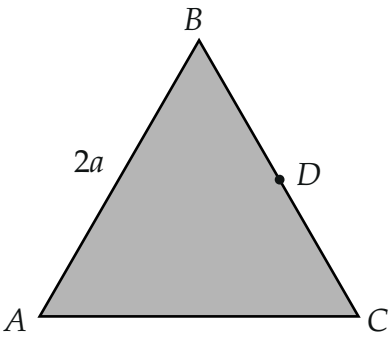

Рис. 8

1. Определите потенциал в точке C треугольной пластинки.
2. Определите потенциал в точке D, лежащей на середине стороны треугольной пластинки.

Теперь из треугольной пластинки ABC удаляют правильный треугольник со стороной a (рис. 9).

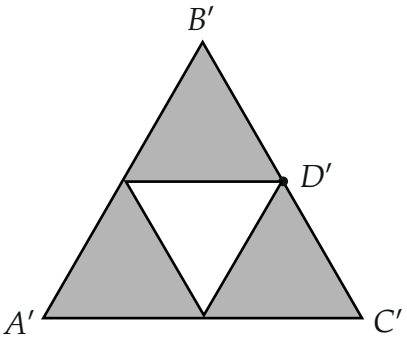

Рис. 9

3. Определите потенциал в точке D' «дырявой» пластинки.
4. Определите потенциал в точке C' «дырявой» пластинки.

Примечание. Все пластины удалены друг от друга и других тел.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Считать потенциал пластинки интегралом не нужно. Работают два приёма: принцип суперпозиции (пластинку можно резать на куски, потенциалы кусков складываются) и подобие (увеличили пластинку в k раз при той же σ — потенциал в сходственной точке вырос в k раз). Все фигуры задачи режутся на одинаковые правильные треугольники со стороной a; потенциал такого треугольника в вершине выразим через φ_2, а потенциал в вершине острого угла ромба φ_1 даст недостающее неизвестное.

Обозначения. φ_0 — потенциал, который правильный треугольник со стороной a (плотность σ) создаёт в своей вершине (по симметрии — одинаковый во всех трёх вершинах); E и F — середины сторон AB и AC, D — середина BC (рис. 3); потенциал на бесконечности равен нулю.

1. Ромб через треугольники. Короткая диагональ делит ромб с углом 60° на два правильных треугольника I и II со стороной a (рис. 1). Вершина тупого угла — общая вершина обоих, поэтому по принципу суперпозиции

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \varphi_0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 = \frac{\varphi_2}{2}.$$

Вершина острого угла — вершина только треугольника I, а от треугольника II она удалена; его вклад отдельно не выражается через φ_0, поэтому φ_1 остаётся вторым независимым данным.

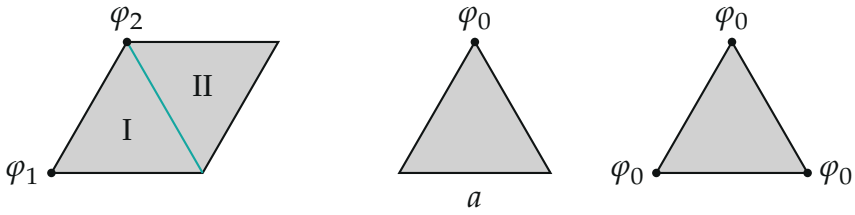

Рис. 1. Ромб — два правильных треугольника; треугольник со стороной a создаёт в каждой вершине потенциал φ_0.

2. Подобие. Увеличим пластинку вдвое при той же σ (рис. 2). Мысленно разобьём её на малые кусочки — точечные заряды. Сходственный кусочек большой пластинки имеет вчетверо большую площадь, значит, заряд $4\Delta q$, а до сходственной точки P он вдвое дальше. Потенциал точечного заряда $k\,\Delta q/r$, поэтому вклад кусочка

$$\frac{k\cdot 4\Delta q}{2r} = 2\cdot\frac{k\,\Delta q}{r}$$

вырос вдвое; сумма вкладов — тоже. В общем виде: потенциал плоской пластинки пропорционален σL, где L — её размер.

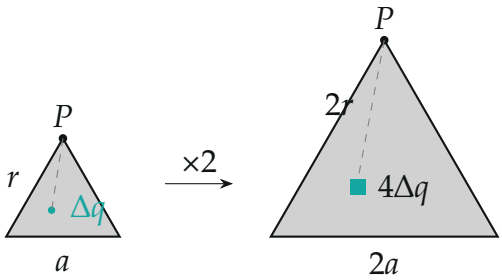

Рис. 2. При увеличении пластинки вдвое заряд кусочка растёт вчетверо, расстояние — вдвое.

Пункт 1. Треугольник ABC подобен треугольнику со стороной a с коэффициентом 2, C — его вершина:

$$\varphi_C = 2\varphi_0 = \varphi_2.$$

Пункт 2. Средние линии делят ABC на четыре правильных треугольника со стороной a (рис. 3): AEF, EBD, FDC и центральный DEF. Четырёхугольник $AEDF$ — ромб с острыми углами при A и D; он создаёт в D потенциал φ_1. Остаются треугольники EBD и FDC, для каждого D — вершина, вклад φ_0. По принципу суперпозиции

$$\varphi_D = \varphi_1 + 2\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2.$$

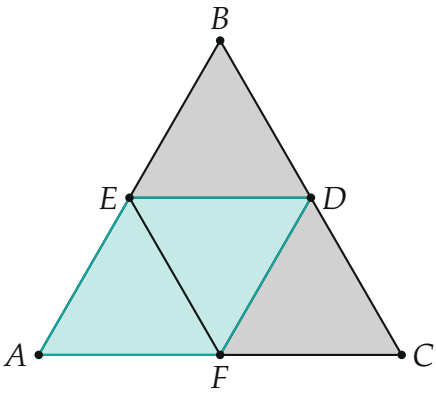

Рис. 3. Треугольник ABC из четырёх треугольников со стороной a; бирюзой — ромб $AEDF$.

Пункт 3. Убрать из пластинки центральный треугольник DEF — то же, что наложить на целую пластинку такой же треугольник с плотностью $-\sigma$. Точка D' — вершина вырезанного треугольника, он давал в ней φ_0:

$$\varphi_{D'} = \varphi_D - \varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{\varphi_2}{2} = \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}.$$

Пункт 4. Нужно знать вклад x центрального треугольника DEF в точке C, а C — не его вершина. Найдём x через другой ромб: $CFED$ — ромб со стороной a с острым углом 60° при вершине C (рис. 4). Он состоит из треугольника FDC (для него C — вершина, вклад φ_0) и треугольника DEF (вклад x):

$$\varphi_1 = \varphi_0 + x \;\Rightarrow\; x = \varphi_1 - \frac{\varphi_2}{2}.$$

Потенциал дырявой пластинки в C' — потенциал целой минус вклад вырезанного треугольника:

$$\varphi_{C'} = \varphi_C - x = \varphi_2 - \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2} = \frac{3}{2}\varphi_2 - \varphi_1.$$

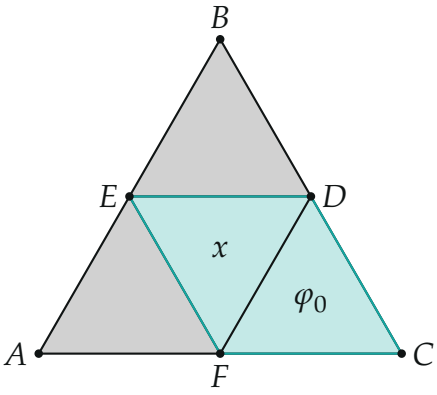

Рис. 4. Ромб CFED: треугольник FDC даёт в C потенциал φ_0, центральный DEF — x.

Обратите внимание: потенциал пластинки растёт пропорционально её размеру, а не площади: заряд растёт как L^2, но и расстояния растут как L. Поэтому $\varphi_C = 2\varphi_0$, а не $4\varphi_0$.

Проверка. Каждый ответ линеен по φ_1, φ_2 — размерность потенциала. Знаки: треугольник DEF ближе к D, чем к C, значит, его вклад в D больше: $\varphi_0 > x$, т. е. $\varphi_2 > \varphi_1$ — так и должно быть: тупая вершина ромба ближе к его заряду в среднем, чем острая. Тогда $\varphi_{C'} = \varphi_C - x > \varphi_C - \varphi_0 = \frac{\varphi_2}{2} > 0$. Для оценки численно: прямое интегрирование (python) даёт $\varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3\, k\sigma a \approx 0{,}951\, k\sigma a$, $\varphi_1 \approx 1{,}330\, k\sigma a$, $\varphi_2 \approx 1{,}903\, k\sigma a$, и вклад $x = \varphi_1 - \varphi_0 \approx 0{,}378\, k\sigma a < \varphi_0$.

Ответ. 1) $\varphi_C = \varphi_2$; 2) $\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2$; 3) $\varphi_{D'} = \varphi_1 + \frac{\varphi_2}{2}$; 4) $\varphi_{C'} = \frac{3}{2}\varphi_2 - \varphi_1$.