Оцени и докажи

Задача 5. [ВсОШ 2018/19, 10 класс, задача 5] «Оцени и докажи». Бесконечная сетка с квадратными ячейками собрана из одинаковых резисторов. В узел A извне втекает ток I (рис. 10). Оцените силу тока в звене BC с погрешностью не более 10%. Докажите, что погрешность вашей оценки не превышает 10%.

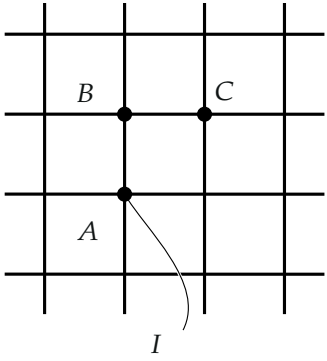

Рис. 10

▲ **Решение.** **Что происходит.** Ток I входит в узел A и растекается по сетке на бесконечность. Точно найти ток в звене BC с помощью одних правил Кирхгофа нельзя — уравнений бесконечно много. Но симметрия сетки даёт несколько токов сразу, а условие «токи в дальних звеньях текут от A, т. е. положительны» превращает правила Кирхгофа в два неравенства. Ток BC оказывается зажат в узкую «вилку»; её середина и есть оценка. Класс задачи — «бесконечная сетка: симметрия + правила Кирхгофа».

Обозначения. R — сопротивление звена; узлы: B над A, C справа от B, D над B, E над C, F справа от A (рис. 1); $I_1 \dots I_5$ — токи в звеньях, направления — на рисунке; I_2 — искомый ток в BC.

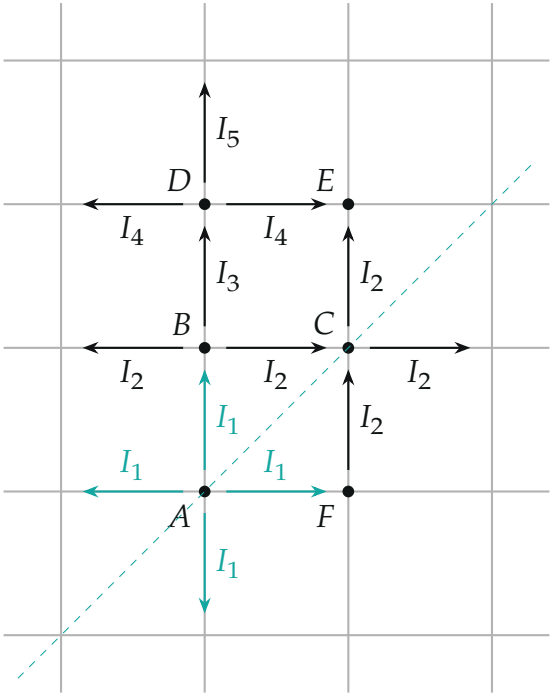

Рис. 1. Токи вблизи узла A; пунктир — ось симметрии AC.

1. Токи из симметрии. Сетка переходит в себя при повороте на 90° вокруг A, поэтому из A по четырём звеньям уходят равные токи:

$$I_1 = \frac{I}{4}.$$

Отражение относительно вертикали через A и B переводит сетку в себя: токи из B вправо и влево равны, обозначим их I_2, ток вверх — I_3. Отражение относительно диагонали AC (пунктир) переводит B в F: по звену FC в узел C тоже втекает I_2. Та же диагональ переводит звено «из C вправо» в звено «из C вверх», токи в них равны; по первому правилу Кирхгофа для узла C втекает $2I_2$ — значит, каждый из двух вытекающих токов тоже I_2.

2. Первое правило Кирхгофа для узла B. Втекает I_1, вытекает $2I_2 + I_3$:

$$\frac{I}{4} = 2I_2 + I_3 \;\Rightarrow\; I_3 = \frac{I}{4} - 2I_2.$$

3. Напряжение U_{BE} двумя путями. Разность потенциалов не зависит от пути (рис. 2): через D и через C. По закону Ома для каждого звена

$$I_3R + I_4R = I_2R + I_2R \;\Rightarrow\; I_4 = 2I_2 - I_3 = 4I_2 - \frac{I}{4}.$$

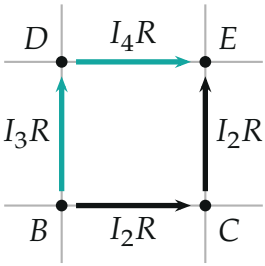

Рис. 2. Два пути от B к E: через D (бирюзой) и через C.

4. Первое правило Кирхгофа для узла D. Из D вправо и влево по симметрии уходят равные токи I_4, вверх — I_5:

$$I_3 = 2I_4 + I_5.$$

5. Неравенства. Токи I_4 и I_5 текут от источника наружу — потенциал в сетке тем меньше, чем дальше узел от A, поэтому $I_4 > 0$ и $I_5 > 0$. Из $I_4 > 0$:

$$4I_2 - \frac{I}{4} > 0 \;\Rightarrow\; I_2 > \frac{I}{16}.$$

Из $I_5 > 0$, т. е. $I_3 > 2I_4$:

$$\frac{I}{4} - 2I_2 > 8I_2 - \frac{I}{2} \;\Rightarrow\; 10I_2 < \frac{3}{4}I \;\Rightarrow\; I_2 < \frac{3}{40}I.$$

Итак,

$$\frac{10}{160}I < I_2 < \frac{12}{160}I.$$

6. Оценка и её погрешность. Берём середину вилки (рис. 3):

$$I_{BC} = I_2 \approx \frac{11}{160}I \approx 0{,}069\,I.$$

Истинное значение лежит внутри вилки, поэтому отличается от оценки не больше чем на полуширину $\frac{1}{160}I$. Относительная погрешность не больше $\frac{1/160}{10/160} = \frac{1}{10}$ (отнесли к наименьшему возможному значению) — т. е. не больше 10%; по отношению к оценке — $\frac{1}{11} \approx 9\%$.

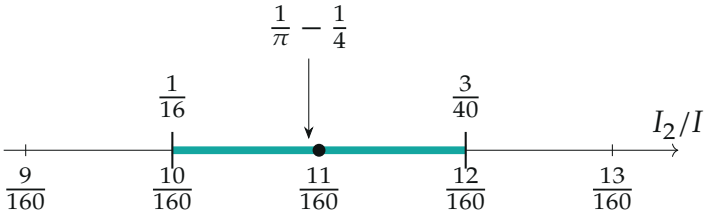

Рис. 3. Вилка для I_2/I; точка — оценка $\frac{11}{160}$, стрелка — точное значение.

Обратите внимание: доказательство держится на знаках $I_4 > 0$ и $I_5 > 0$. Одной симметрии мало: без неравенств из правил Кирхгофа получится лишь $I_2 < I/8$ (из $I_3 > 0$).

Проверка. Ток пропорционален I и не зависит от R — так и должно быть для сетки из одинаковых резисторов. Точное решение через функцию Грина бесконечной сетки (разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = \frac{IR}{4}$, $\varphi_A - \varphi_C = \frac{IR}{\pi}$) даёт

$$I_2 = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}\right)I \approx 0{,}0683\,I,$$

внутри вилки; оценка $\frac{11}{160}I = 0{,}0688\,I$ отличается от него меньше чем на 1%. Точные значения проверяют и знаки: $I_4 \approx 0{,}023\,I > 0$, $I_5 \approx 0{,}067\,I > 0$.

Ответ. $I_{BC} \approx \dfrac{11}{160}I \approx 0{,}07\,I$; доказано $\dfrac{I}{16} < I_{BC} < \dfrac{3I}{40}$, погрешность не больше $\dfrac{1}{11} \approx 9\%$ (точно $I_{BC} = (\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4})I$).