# Катушка

**Задача 1.** [ВсОШ 2018/19, 11 класс, практический тур, задача 1] «Катушка».

В выданном вам черном ящике находится катушка с большим числом витков. Ось катушки совпадает с осью отверстия в черном ящике. В этой работе ваша задача — определить параметры катушки, исследуя ее взаимодействие с постоянным магнитом (магнитным шариком).

Магнитные свойства постоянных магнитов характеризуются магнитным моментом $p_m$. Магнитный момент шарика направлен вдоль оси латунной трубки, поэтому в рамках данной задачи сила, действующая на шарик со стороны катушки, направлена по оси катушки и определяется выражением $F = p_m \dfrac{dB}{dx}$, где $p_m = (0{,}10 \pm 0{,}01)$ А·м$^2$, $B$ — индукция магнитного поля на оси катушки, $x$ — расстояние между шариком и центром катушки.

Подайте на катушку напряжение $U = 12$ В с помощью блока питания. Убедитесь, что переключатель на блоке питания установлен в положение «12В». Если это не так, обратитесь к ответственным за аудиторию.

Соберите установку так, чтобы магнитный шарик, прикрепленный к латунной трубке, мог перемещаться вдоль оси катушки. Запишите номер установки.

1. Снимите зависимость силы $F$, действующей на магнитный шарик со стороны катушки, от расстояния $x$ между шариком и центром катушки. Учтите, что центр катушки может не совпадать с центром черного ящика. Постройте график этой зависимости.
2. Определите индукцию магнитного поля $B_0$ в центре катушки.
3. Получите теоретическую формулу для индукции магнитного поля $B$ на оси витка радиуса $r$ на расстоянии $x$ от центра витка, по которому течет ток $I$.
4. Определите радиус катушки $R$ в предположении, что высота катушки много меньше диаметра, а все витки имеют один радиус (короткая катушка).
5. Определите количество витков в катушке $N$ и диаметр проволоки $d$, по прежнему считая катушку короткой.

Масса медной обмотки составляет 70% массы черного ящика. Плотность меди $\rho = 8{,}96$ г/см$^3$. Удельная проводимость (величина, обратная удельному сопротивлению) меди $\lambda = 59 \cdot 10^6$ Ом$^{-1}$·м$^{-1}$.

Оборудование. Весы электронные, катушка индуктивности в черном ящике, латунная трубка с неодимовым магнитным шариком, блок питания, штатив, деревянная линейка, плоская клипса, две клипсы для бумаги, деревянный кубик, прищепка.

Примечание. Согласно закону Био–Савара–Лапласа, индукция магнитного поля, создаваемого в точке $C$ элементом тока $I$ длиной $dl$, находящимся в точке $D$, равна $dB = \dfrac{kI\,dl\sin\alpha}{r^2}$, где $r$ — длина отрезка $CD$, $\alpha$ — угол между отрезком $CD$ и направлением тока, $k = 10^{-7}$ Гн/м. Вектор индукции поля перпендикулярен как направлению тока, так и отрезку $CD$ (рис. 15).

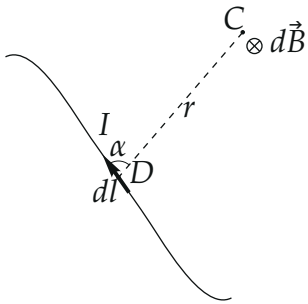


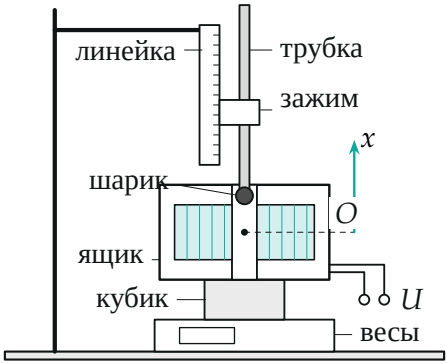

*Рис. 15.*

▲ **Решение.** **Что происходит.** Поле внутри ящика датчиком не измерить, но его можно «прощупать» шариком с известным магнитным моментом $p_m$. Сила на шарик пропорциональна не полю, а его градиенту: $F = p_m\,dB/dx$. Поэтому, измерив $F(x)$, мы получаем «производную» поля: площадь под графиком силы даёт $B_0$ в центре, положение максимума и наклон в центре дают радиус $R$ витков, а ток, число витков и диаметр провода находим из $B_0$, закона Ома и массы обмотки. Это обратная задача: по силе восстанавливаем поле, по полю — устройство катушки. Данные ниже — результаты организаторов; в работе у вас будут свои числа, обработка та же.

**Обозначения.** Ось $x$ — ось катушки, начало в её центре $O$; $h$ — показание линейки, $x = h - h_0$. $I_1$ — ток в одном витке, $I = NI_1$ — суммар-

ный ток через сечение катушки («ампер-витки»). $R$ — радиус витков, $N$ — их число, $d$ — диаметр провода, $M$ — масса обмотки.

**Пункт 1. Установка, измерение, график.** Трубку с шариком зажимаем «бульдогом» на линейке, линейку — в штативе: шарик движется вдоль оси катушки, высоту $h$ читаем по линейке. Ящик стоит на кубике на весах; провод питания придерживаем прищепкой, чтобы он не тянул ящик.




*Установка. Шарик на латунной трубке опускается в отверстие ящика вдоль оси катушки; высоту $h$ читают по линейке. Ящик стоит на кубике на весах. $O$ — центр катушки, $x$ — координата шарика вдоль оси.*

*Почему весы измеряют силу.* Катушка действует на шарик силой $F$ вдоль оси. По третьему закону Ньютона шарик действует на катушку, то есть на ящик, такой же по модулю силой в обратную сторону. Шарик висит на штативе, а ящик стоит на весах, поэтому показания меняются ровно на эту силу: $F = \Delta m\, g$, где $\Delta m$ — прибавка показаний при включении тока. Весы обнуляем при выключенном питании; включая и выключая ток, убеждаемся, что показания воспроизводятся.

*Где центр.* В центре катушки поле наибольшее, $dB/dx = 0$, поэтому $F = 0$. Показания проходят через нуль между $h = 164$ мм ($\Delta m = -0{,}12$ г) и $h = 166$ мм ($+0{,}19$ г):

$$h_0 = 164 + 2 \cdot \frac{0{,}12}{0{,}12 + 0{,}19} \approx 164{,}8 \text{ мм}.$$

Начало отсчёта берём по нулю силы, а не по середине ящика (условие предупреждало, что они могут не совпасть). Дальше $x = h - h_0$, $F = \Delta m\, g$ при $g = 9{,}8$ м/с$^2$: грамм показаний — это 9,8 мН. По одну сторону центра показания растут, по другую падают; $x > 0$ берём там, где растут. Нужен модуль $F = p_m\,|dB/dx|$.

| $h$, мм | $x$, мм | $F$, мН | $h$, мм | $x$, мм | $F$, мН | $h$, мм | $x$, мм | $F$, мН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 158 | −6,8 | −9,1 | 176 | 11,2 | 14,3 | 210 | 45,2 | 5,1 |
| 160 | −4,8 | −6,2 | 178 | 13,2 | 16,9 | 215 | 50,2 | 3,8 |
| 162 | −2,8 | −3,5 | 180 | 15,2 | 17,3 | 220 | 55,2 | 3,0 |
| 164 | −0,8 | −1,2 | 182 | 17,2 | 17,5 | 225 | 60,2 | 2,4 |
| 166 | 1,2 | 1,9 | 184 | 19,2 | 16,4 | 230 | 65,2 | 1,7 |
| 168 | 3,2 | 5,3 | 190 | 25,2 | 14,3 | 235 | 70,2 | 1,2 |
| 170 | 5,2 | 8,1 | 195 | 30,2 | 11,2 | 240 | 75,2 | 1,0 |
| 172 | 7,2 | 10,1 | 200 | 35,2 | 8,8 | 245 | 80,2 | 0,9 |
| 174 | 9,2 | 12,4 | 205 | 40,2 | 6,7 | 250 | 85,2 | 0,7 |

Сила растёт от нуля почти линейно, достигает 17,5 мН при $x \approx 17$ мм и спадает. Далеко от катушки поле — поле диполя, $B \propto x^{-3}$, поэтому $F \propto dB/dx \propto x^{-4}$. Поле $B(x)$ чётно, значит $F(x)$ нечётна, и достаточно рассматривать $x > 0$.

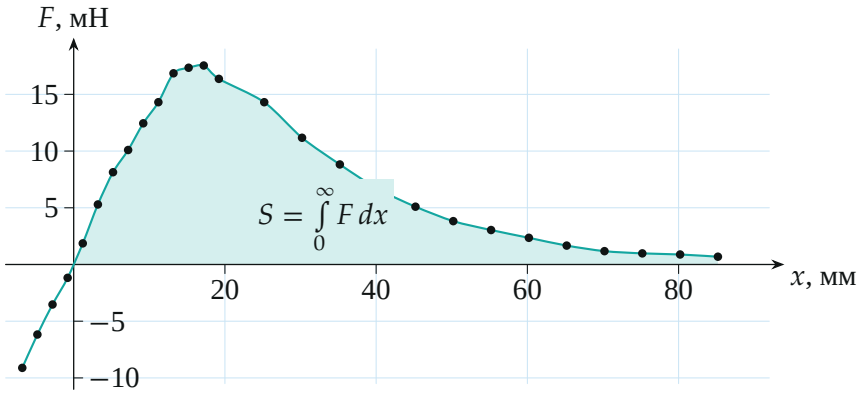



*График $F(x)$: точки — измерения; заштрихована площадь $S$ (пункт 2).*

**Пункт 2. Индукция в центре $B_0$.** Запишем $F = p_m\,dB/dx$ для малого смещения $dx$: $|dB| = F\,dx/p_m$. Пойдём вдоль оси от далёкой точки, где поле равно нулю (поле Земли не учитываем), к центру и сложим малые приращения; поле растёт к центру, поэтому

$$B_0 = \frac{1}{p_m}\int_0^\infty F\,dx = \frac{S}{p_m},$$

где $S$ — площадь под графиком силы от центра до бесконечности (заштрихована на рисунке пункта 1): $B_0$ напрямую не измерить, а площадь по точкам считается просто. Считаем трапециями, $S_i = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1})(x_{i+1} - x_i)$, от точки $(0;0)$ до $x = 85{,}2$ мм: сумма 581 мН·мм. За последней точкой остаётся «хвост»; там $F \propto x^{-4}$, и

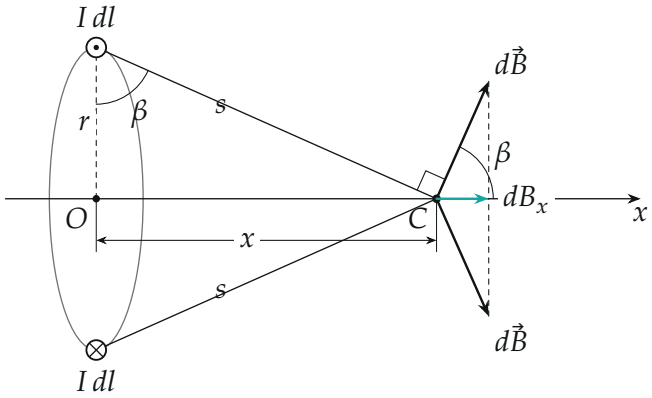
$$\int_{x_k}^\infty F\,dx = \frac{F_k x_k}{3} = \frac{0{,}686 \cdot 85{,}2}{3} \approx 19{,}5\ \text{мН}\cdot\text{мм}.$$

Итого $S \approx 601$ мН·мм $= 6{,}01\cdot10^{-4}$ Н·м и $B_0 = S/p_m = 6{,}01\cdot10^{-4}/0{,}10 \approx 6{,}0\cdot10^{-3}$ Тл.

Обратите внимание: площадь берём только от центра в одну сторону. На всей оси интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ равен нулю: слева сила меняет знак, и вклады сокращаются. Хвост добавляет всего 3 %, но без него ответ занижен систематически.

**Пункт 3. Поле витка радиуса $r$ на его оси.** Разобьём кольцо на малые элементы $dl$, каждый — элемент тока $I\,dl$. Ток идёт по касательной, а отрезок от элемента до точки $C$ лежит в плоскости, проходящей через ось, поэтому они перпендикулярны и $\sin\alpha = 1$. Расстояние до $C$ равно $s = \sqrt{r^2 + x^2}$, закон Био–Савара–Лапласа даёт

$$dB = \frac{kI\,dl}{s^2} = \frac{kI\,dl}{r^2 + x^2}.$$




*Поле одного витка в точке C на оси. Элементы $I\,dl$ на противоположных концах диаметра создают $d\vec{B}$ с одинаковыми осевыми и противоположными поперечными составляющими; кружок с точкой — ток к нам, с крестом — от нас.*

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярен и току, и отрезку $s$, то есть лежит в той же плоскости. Его угол $\beta$ с осью равен углу между $s$ и радиусом кольца (углы со взаимно перпендикулярными сторонами), поэтому из треугольника с катетами $r$, $x$ и гипотенузой $s$ получаем $\cos\beta = r/s$ и

$$dB_x = dB\cos\beta = \frac{kI\,dl}{s^2}\cdot\frac{r}{s} = \frac{kIr\,dl}{(r^2+x^2)^{3/2}}.$$

Поперечные составляющие элементов на концах диаметра противоположны и сокращаются. Величины $r$, $x$, $s$ у всех элементов одинаковы, суммируется только $dl$, $\sum dl = 2\pi r$:

$$B = \sum dB_x = \frac{kIr}{(r^2+x^2)^{3/2}}\cdot 2\pi r = \boxed{\frac{2\pi kIr^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}}$$

Проверка: при $x = 0$ получаем $B = 2\pi kI/r$ — известное поле в центре витка ($k = \mu_0/4\pi$); при $x \gg r$ получаем $B = 2kp/x^3$ с моментом $p = I\pi r^2$ — поле диполя на оси; такой спад $x^{-3}$ мы и использовали для «хвоста» в пункте 2.

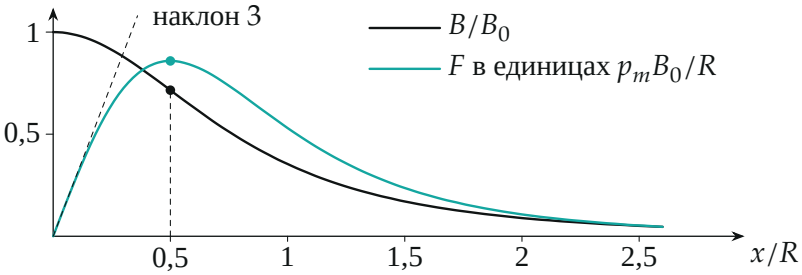
**Пункт 4. Радиус катушки** $R$**.** Катушка короткая: все $N$ витков лежат

практически в одной плоскости, у каждого один радиус $R$ и одно $x$. Поля витков одного направления складываются, поэтому в формулу пункта 3 вместо тока витка подставляем $I = NI_1$:

$$B = \frac{2\pi k I R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}}, \qquad \frac{dB}{dx} = -\frac{6\pi k I R^2 x}{(R^2+x^2)^{5/2}},$$

$$F = p_m\left|\frac{dB}{dx}\right| = \frac{6\pi k\, p_m I R^2 x}{(R^2+x^2)^{5/2}}.$$

Качественно: около центра поле почти не меняется, сила мала; далеко поле тоже слабеет, сила мала; значит, между ними сила наибольшая — там, где $B$ спадает круче всего (рисунок).




*Поле короткой катушки $B/B_0$ и сила $F$ в безразмерных координатах. Максимум силы — в точке $x = R/2$, где поле спадает круче всего; в нуле касательная к $F$ имеет наклон 3 в единицах $p_mB_0/R^2$.*

*Способ 1: по положению максимума.* Максимум $F$ — нуль её производной:

$$\frac{d}{dx}\left[x\,(R^2+x^2)^{-5/2}\right] = \frac{R^2-4x^2}{(R^2+x^2)^{7/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{\max} = \frac{R}{2}.$$

По графику вершина плоская: при $x$ = 15,2; 17,2; 19,2 мм сила 17,3; 17,5; 16,4 мН, откуда $x_{\max} \approx 17$ мм и $R = 2x_{\max} \approx 34$ мм.

*Способ 2: по наклону графика в центре.* При $x \ll R$ в знаменателе

остаётся $R^5$, $F \approx \kappa_0 x$:

$$\kappa_0 = \frac{dF}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{6\pi k\, p_m I}{R^3}, \qquad B_0 = \frac{2\pi k I}{R}.$$

Делим одно на другое, ток сокращается: $\kappa_0/B_0 = 3p_m/R^2$, откуда

$$R = \sqrt{\frac{3p_m B_0}{\kappa_0}} = \sqrt{\frac{3S}{\kappa_0}}.$$

Наклон берём по четырём точкам ближе всего к центру ($|x| \le 3{,}2$ мм): дальше прямая уже заметно изгибается (поправка $\propto x^3$, по семи точкам с каждой стороны наклон вышел бы 1,4, занижен). Получаем $\kappa_0 \approx 1{,}5$ мН/мм $= 1{,}5$ Н/м, и $R = \sqrt{3 \cdot 6{,}01 \cdot 10^{-4}/1{,}5} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-2}$ м.

Оба способа дают $R = (3{,}4 \pm 0{,}1)$ см. Обратите внимание: $p_m$ известен лишь с точностью 10 %, но $R$ от него не зависит: произведение $p_m B_0 = S$ получено прямо из измеренной силы.

**Пункт 5. Число витков $N$ и диаметр провода $d$.** *Ток.* Из $B_0 = 2\pi k I/R$:

$$I = \frac{B_0 R}{2\pi k} = \frac{6{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}034}{2\pi \cdot 10^{-7}} \approx 3{,}2 \cdot 10^2 \text{ А}.$$

Обратите внимание: это $I = NI_1$ — ампер-витки; по самому проводу течёт ток в $N$ раз меньше.

*Диаметр.* Обмотка — один провод длиной $l = N \cdot 2\pi R$ и сечением $S_{\text{пр}} = \pi d^2/4$ под напряжением $U$. Закон Ома для всей обмотки, $U/I_1 = l/(\lambda S_{\text{пр}})$, с учётом $I_1 = I/N$:

$$\frac{UN}{I} = \frac{N \cdot 2\pi R}{\lambda\, \pi d^2/4} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{8IR}{\lambda U}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 325 \cdot 0{,}034}{59 \cdot 10^6 \cdot 12}} \approx 3{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Число $N$ сократилось: диаметр от него не зависит.

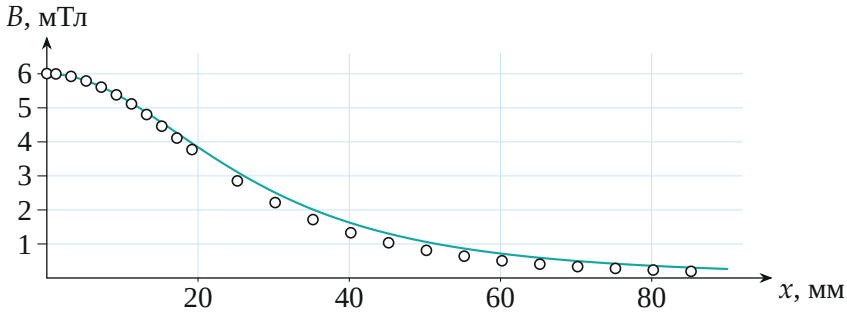
*Число витков.* Масса обмотки — масса меди объёмом $l\, S_{\text{пр}}$:

$$M = \rho\, l\, S_{\text{пр}} = \rho N \cdot 2\pi R \cdot \frac{\pi d^2}{4} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{2M}{\pi^2 \rho R d^2} = \frac{\lambda U M}{4\pi^2 \rho I R^2}.$$

По данным организаторов $M = 0{,}70\,m_{\text{ящика}} = 204$ г, и

$$N = \frac{59 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 0{,}204}{4\pi^2 \cdot 8960 \cdot 325 \cdot 0{,}034^2} \approx 1{,}1 \cdot 10^3.$$

**Проверка.** Размерности: $d = \sqrt{8IR/(\lambda U)}$ даёт $\sqrt{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{В} \cdot \text{м}/(\text{А} \cdot \text{В})} =$ м; $B_0 = S/p_m$ даёт $\text{Н} \cdot \text{м}/(\text{А} \cdot \text{м}^2) =$ Тл. Согласованность независимо: длина провода $l \approx 230$ м, сопротивление $l/(\lambda S_{\text{пр}}) \approx 41$ Ом, ток в проводе $I_1 = U/41 \approx 0{,}29$ А, $NI_1 \approx 320$ А — как в начале пункта. Катушка действительно короткая: сечение меди витков $N\pi d^2/4 \approx 1{,}1$ см$^2$, то есть полосу шириной порядка 1 см при диаметре $2R \approx 7$ см. Наконец, по найденным $R$ и $I$ строим $B(x)$ по формуле пункта 3 и сравниваем с полем, восстановленным из опытной силы:




*Проверка модели. Кружки — поле $B(x)$, восстановленное из опытной $F(x)$ (то же интегрирование, что в пункте 2, но до точки $x$); линия — формула пункта 3 при $R = 3{,}4$ см и $I = 325$ А.*

До $x \approx 25$ мм кривые совпадают в пределах 5–10 %, дальше формула выше опыта (при $x = 85$ мм в 1,5 раза): там сила не больше 0,7 мН при дискретности весов 0,1 мН и возможном дрейфе нуля, хвост измерен грубо, а на $B_0$ он влияет лишь на несколько процентов. Погрешности: $B_0$ — около 10 % (из $p_m$), $R$ — 3 %, $d$ — около 8 %, $N$ — около 15 %.

Смысл: по одному графику силы на шарик, без прямого измерения поля, найдено устройство катушки в закрытом ящике.

**Ответ.** 1) график $F(x)$ — на рисунке в пункте 1; 2) $B_0 \approx 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ Тл; 3) $B = \dfrac{2\pi k I r^2}{(r^2 + x^2)^{3/2}}$; 4) $R \approx 3{,}4$ см; 5) $N \approx 1{,}1 \cdot 10^3$, $d \approx 0{,}35$ мм.