Два цилиндра

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 1] «Два цилиндра». Внутрь закреплённого цилиндра радиуса R, ось O которого горизонтальна, помещают лёгкий цилиндр вдвое меньшего радиуса. Ось C меньшего цилиндра также горизонтальна. На поверхности меньшего цилиндра закреплено маленькое тело массы m. Меньший цилиндр удерживают так, что тело находится на оси большего цилиндра, а плоскость OC (в которой лежат оси обоих цилиндров) составляет угол α с вертикалью (рис. 11).

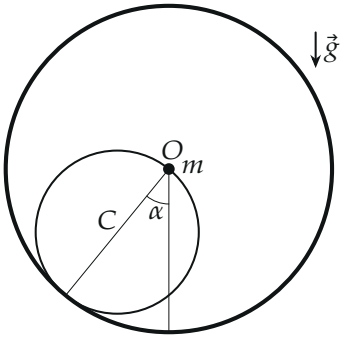


Рис. 11

1. Меньший цилиндр отпускают и он начинает катиться по внутренней поверхности большего без проскальзывания. Определите ускорение тела сразу после начала движения.
2. Определите ускорение и скорость тела в момент времени, когда плоскость OC вертикальна. Считайте, что до этого момента движение шло без проскальзывания.
3. Определите минимальное значение коэффициента трения между цилиндрами μ, при котором возможно движение без проскальзывания до момента, когда плоскость OC займёт положение, симметричное начальному по отношению к вертикали.
4. Определите скорость тела в момент начала проскальзывания, если коэффициент трения между цилиндрами задан и равен μ.

▲ **Решение. Что происходит.** Лёгкий цилиндр катится внутри большего, а тело сидит на нём в точке, которая в начале совпадала с осью O большого цилиндра. Главная идея: для цилиндра вдвое меньшего радиуса такая точка при качении без проскальзывания движется строго по прямой — по диаметру большого цилиндра. Дальше задача становится знакомой: тело ускоряется вдоль прямой, а сила со стороны цилиндров направлена поперёк неё и ускорения вдоль прямой не создаёт. Класс задачи: качение без проскальзывания (кинематическая связь) плюс условие сцепления $F_{\text{тр}} \le \mu N$ (динамика). Сначала геометрия, потом силы.

Обозначения. R — радиус большого цилиндра, O — его ось; C — ось малого цилиндра, $|OC| = R/2$; P — точка касания цилиндров, Q — тело; A — начальная точка касания (радиус OA составляет угол α с вертикалью); $\vartheta = \angle AOP$ — угол, на который с начала движения повернулась плоскость OC; $l = |OQ|$ — смещение тела от оси O; $\vec{R}_{\text{ц}}$ — сумма реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ со стороны большого цилиндра.

1. Тело движется по прямой. Расстояние от C до O равно радиусу малого цилиндра, поэтому окружность малого цилиндра всегда проходит через O. Точка P лежит на большой окружности, $|OP| = R$, то есть OP — диаметр малой окружности и C — его середина. Вначале тело находилось в точке O, диаметрально противоположной точке A' малого цилиндра, которая коснулась большого в точке A.

Качение без проскальзывания: дуга AP большой окружности равна дуге $A'P$ малой, длина каждой $R\vartheta$ (две бирюзовые дуги на рисунке). У малой окружности радиус вдвое меньше, поэтому её дуга соответствует центральному углу 2ϑ:

$$\angle A'CP = 2\vartheta.$$

Тело Q противоположно A', а O противоположна P — обе пары повёрнуты на один и тот же угол, поэтому $\angle QCO = \angle A'CP = 2\vartheta$. Вписанный угол $\angle QPO$ опирается на ту же дугу QO и вдвое меньше центрального:

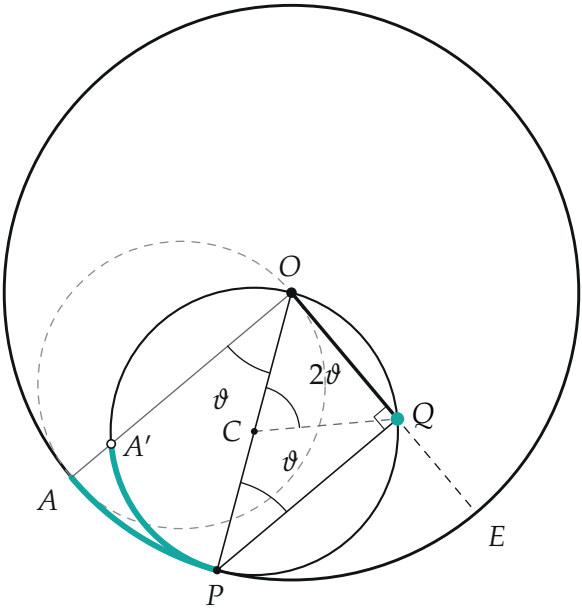
$$\angle QPO = \vartheta.$$

Угол OQP опирается на диаметр OP и потому прямой. Из прямоуголь-

ного треугольника OQP с гипотенузой $OP = R$:

$$l = |OQ| = R\sin\vartheta, \qquad \angle POQ = 90^\circ - \vartheta.$$

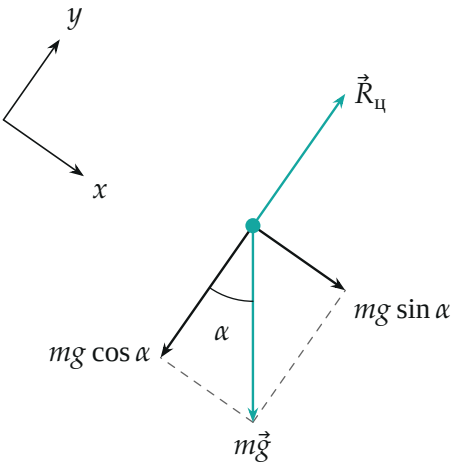
Луч OP повёрнут от OA на ϑ, а луч OQ — от OP ещё на $90^\circ - \vartheta$ в ту же сторону. Значит, OQ повёрнут от OA ровно на 90° при любом ϑ: тело движется по прямой OE, проходящей через O перпендикулярно начальному радиусу OA. Радиус OA образует угол α с вертикалью, поэтому OE образует угол α с горизонтом.



2. Сила со стороны цилиндров перпендикулярна прямой. Малый цилиндр лёгкий (массой можно пренебречь), поэтому сумма сил и сумма моментов сил, действующих на него, равны нулю. Сил две: $\vec{R}_{\text{ц}} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$ в точке P со стороны большого цилиндра и сила в точке Q со стороны тела. Две силы с нулевой суммой и нулевым суммарным моментом равны по модулю, противоположны и лежат на одной прямой — на PQ. Следовательно, сила $\vec{R}_{\text{ц}}$, с которой цилиндры действуют на тело, направлена вдоль PQ, а по п. 1 $PQ \perp OQ$. Она перпендикулярна траектории тела.

Обратите внимание: это следствие того, что цилиндр лёгкий и тело на нём закреплено. Именно поэтому трение не «тянет» тело вдоль прямой — вдоль неё работает только сила тяжести.

Запишем второй закон Ньютона для тела m векторно: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_{\text{ц}}$. Ось x направим вдоль OE вниз — тогда $\vec{R}_{\text{ц}}$ в проекцию не войдёт; ось y — вдоль PQ (от P к Q), перпендикулярно траектории.



Вдоль траектории: $ma = mg\sin\alpha$. Поперёк: тело с прямой не уходит, $a_y = 0$, поэтому

$$R_{\text{ц}} = mg\cos\alpha.$$

Сила $\vec{R}_{\text{ц}}$ и по модулю, и по направлению постоянна: она параллельна OA.

Пункт 1. Вдоль прямой тело движется с постоянным ускорением

$$a = g\sin\alpha,$$

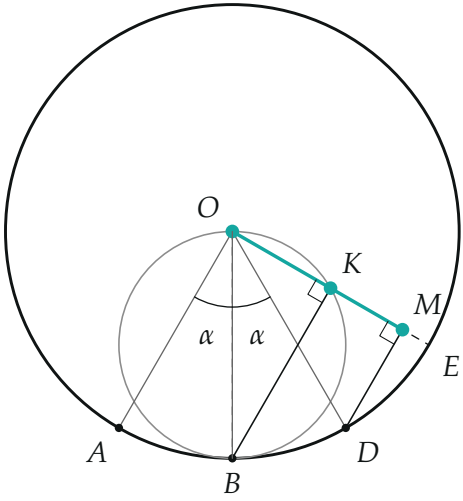
направленным вдоль OE вниз под углом α к горизонту — как на гладкой наклонной плоскости. Это верно и сразу после начала движения.

Пункт 2. Когда плоскость OC вертикальна, $\vartheta = \alpha$ (рисунок ниже: OB — вертикаль, $\angle AOB = \alpha$), и тело в точке K на расстоянии $l = R\sin\alpha$ от O. Ускорение осталось тем же: $a = g\sin\alpha$ вдоль OE (горизонтальная

составляющая $g\sin\alpha\cos\alpha$, вертикальная $g\sin^2\alpha$ вниз). Тело стартовало из покоя и движется равноускоренно:

$$v^2 = 2al = 2g\sin\alpha\cdot R\sin\alpha, \qquad v = \sqrt{2gR}\,\sin\alpha.$$

Второй способ — закон сохранения энергии: работа $\vec{R}_{\text{ц}}$ равна нулю (сила перпендикулярна перемещению). Высота тела уменьшилась на $\Delta h = l\sin\alpha = R\sin^2\alpha$, и $\dfrac{mv^2}{2} = mg\Delta h$ — тот же результат.



Положения тела при вертикальной плоскости OC (точка K, малый цилиндр показан) и при симметричной (точка M). Отрезки BK и DM перпендикулярны траектории.

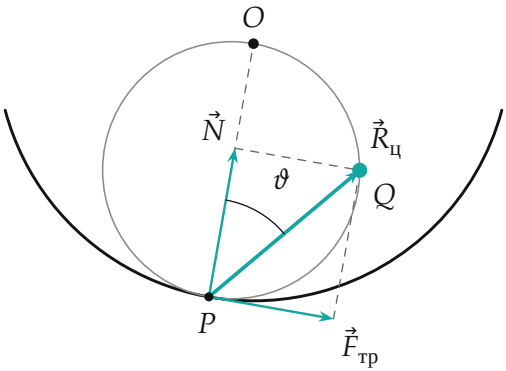
Пункт 3. Какое трение нужно. Нормаль к большой окружности в точке P направлена по радиусу PO, трение — по касательной. Сила $\vec{R}_{\text{ц}}$ параллельна OA, поэтому угол между ней и нормалью PO равен углу $\angle OPQ = \vartheta$ из п. 1 (рисунок ниже). Разложим $\vec{R}_{\text{ц}}$ на нормальную и касательную составляющие:

$$N = R_{\text{ц}}\cos\vartheta = mg\cos\alpha\cos\vartheta, \qquad F_{\text{тр}} = R_{\text{ц}}\sin\vartheta = mg\cos\alpha\sin\vartheta.$$

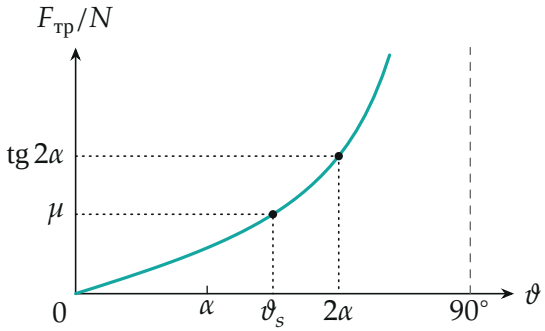
Проскальзывания нет, пока сила трения покоя не превышает μN:

$$F_{\text{тр}} \le \mu N \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{tg}\vartheta \le \mu.$$

Качественно: по мере качения ϑ растёт, нормальная сила N падает (до нуля при $\vartheta \to 90°$), а трение растёт — отношение $F_{\text{тр}}/N = \operatorname{tg}\vartheta$ растёт всё быстрее (график ниже). В самом начале $\vartheta = 0$, трение не нужно вовсе.



Силы в точке касания: сумма $\vec{N} + \vec{F}_{тр} = \vec{R}_{ц}$ идёт вдоль PQ, угол между ней и нормалью PO равен ϑ.



Отношение $F_{тр}/N = \operatorname{tg}\vartheta$ растёт с углом; проскальзывание начинается, когда оно достигает μ (на рисунке $\mu = 1$, $\alpha = 30°$).

Плоскость OC займёт положение, симметричное начальному (угол α с вертикалью по другую сторону), когда она повернётся на $\vartheta = 2\alpha$

($\angle AOD = 2\alpha$, точка M на рисунке к п. 2). Условие сцепления должно выполняться на всём пути, а $\operatorname{tg}\vartheta$ возрастает, поэтому опасен конец:

$$\mu_{\min} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Обратите внимание: формула имеет смысл при $2\alpha < 90°$. При $\alpha \geq 45°$ симметричного положения без проскальзывания не достичь ни при каком μ — нормальная сила обращается в нуль при $\vartheta = 90°$.

Пункт 4. Проскальзывание начинается, когда $\operatorname{tg}\vartheta_s = \mu$, то есть $\sin\vartheta_s = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$. К этому моменту тело прошло по прямой путь

$$l_s = R\sin\vartheta_s = \frac{R\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

а до этого момента ускорение постоянно ($a = g\sin\alpha$, движение из покоя). Отсюда

$$v = \sqrt{2al_s} = \sqrt{\frac{2gR\mu\sin\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}}.$$

При любом μ получается $l_s < R$: проскальзывание начинается раньше, чем тело дойдёт до поверхности большого цилиндра (точка E).

Проверка. Размерность: $[gR] = \text{м}^2/\text{с}^2$, под корнем в п. 4 тоже gR, μ безразмерен. Совпадение пунктов: при $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ проскальзывание начинается в вертикальном положении ($\vartheta_s = \alpha$), и формула п. 4 даёт $v = \sqrt{2gR\sin^2\alpha} = \sqrt{2gR}\sin\alpha$ — ответ п. 2. Предел $\mu \to 0$: $v \to 0$ (проскальзывание сразу).

Смысл: тело ведёт себя как на гладкой наклонной плоскости, а трение нужно лишь на то, чтобы постоянная сила $mg\cos\alpha$ приходилась на поверхность под растущим углом ϑ к нормали.

Ответ. 1) $a = g\sin\alpha$ (вдоль прямой под углом α к горизонту); 2) $a = g\sin\alpha$, $v = \sqrt{2gR}\,\sin\alpha$; 3) $\mu_{\min} = \operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $v = \sqrt{\dfrac{2gR\mu\sin\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}}}$.