Зачем нужны диоды

Задача 3. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 3] «Зачем нужны диоды». Электрическая схема состоит из трех конденсаторов C_1, C_2, C_3 одинаковой емкости C, катушки с индуктивностью L, двух идеальных диодов, источника постоянного напряжения U_0, ключа K (рис. 12). Первоначально перед замыканием ключа конденсаторы не заряжены. Затем ключ переводят в положение 1, и, после установления равновесия, переключают в положение 2.

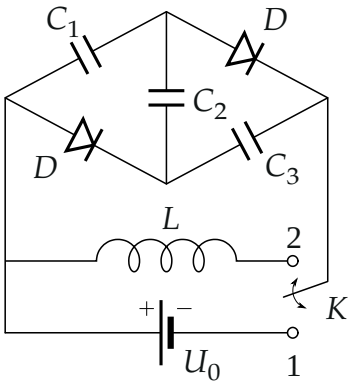


Рис. 12

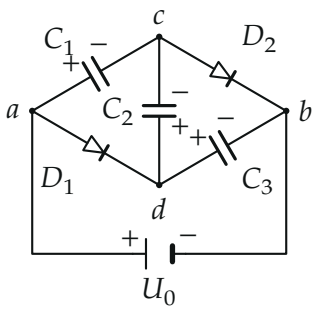
1. Чему равны напряжения на конденсаторах U_1, U_2 и U_3 перед переключением ключа в положение 2?
2. Чему равно максимальное значение I_D тока через диоды после переключения ключа в положение 2?
3. В каких пределах $\left[U_1^{\min}, U_1^{\max}\right]$, $\left[U_2^{\min}, U_2^{\max}\right]$ и $\left[U_3^{\min}, U_3^{\max}\right]$ изменяются напряжения на конденсаторах после переключения ключа в положение 2?
4. Качественно изобразите график зависимости силы тока I, протекающего через индуктивность, от времени.
5. Чему равен период колебаний T тока I?

Активным сопротивлением индуктивности и проводов можно пренебречь.

▲ **Решение. Что происходит.** Идеальный диод пропускает ток в одну сторону (по стрелке) и ничего не пропускает в другую: открытый диод

— провод, закрытый — разрыв цепи. Класс задачи: диоды — перебор состояний. Предполагаем, в каком состоянии диоды, решаем цепь и проверяем знак напряжения на каждом диоде. В положении 1 диоды открыты, и каждый конденсатор заряжается от источника до U_0. В положении 2 диоды окажутся закрытыми, и катушка с тремя конденсаторами образует колебательный контур — задача про гармонические колебания.

Обозначения. Узлы: a — левый, c — верхний, d — нижний, b — правый (рисунок ниже). Диод D_1 стоит между a и d и пропускает ток от a к d; диод D_2 — между c и b и пропускает ток от c к b. $q_0 = CU_0$, φ — потенциалы узлов.



Пункт 1. Положение 1. Узел b через ключ присоединён к минусу источника, узел a — к плюсу, поэтому $\varphi_a - \varphi_b = U_0$. Ток течёт в направлении, пропускаемом диодами, и все диоды открыты. Зарядка идёт по трём путям:

$$a \to C_1 \to c \to D_2 \to b, \qquad a \to D_1 \to d \to C_3 \to b,$$

$$a \to D_1 \to d \to C_2 \to c \to D_2 \to b.$$

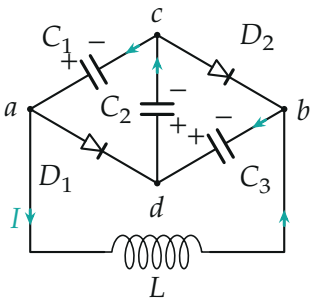
Ток идёт, пока напряжение на конденсаторе меньше того, что даёт источник. В конце установления диоды открыты, падение напряжения на идеальном диоде равно нулю: $\varphi_d = \varphi_a$, $\varphi_c = \varphi_b$. Тогда

$$U_1 = \varphi_a - \varphi_c = U_0, \quad U_3 = \varphi_d - \varphi_b = U_0, \quad U_2 = \varphi_d - \varphi_c = U_0.$$

Заряд каждого конденсатора $q_0 = CU_0$; плюс на пластинах C_1 со стороны a, у C_2 и C_3 — со стороны d (рисунок ниже: положение 1, диоды

открыты).

Положение 2: контур. Источник отключён, катушка соединяет a и b. Предположим, что диоды закрыты (проверим ниже). Тогда единственный замкнутый путь — последовательная цепочка $a \to L \to b \to C_3 \to d \to C_2 \to c \to C_1 \to a$, и ток I через катушку и три конденсатора один и тот же. Выберем направление I по этому обходу: в начале $U_1 + U_3 - U_2 = U_0 > 0$ (обход проходит C_1 и C_3 от минуса к плюсу, а C_2 — от плюса к минусу), и ток пойдёт именно так. Конденсаторы C_1 и C_3 при этом разряжаются, C_2 заряжается.



Положение 2: диоды закрыты, ток I идёт по цепочке из катушки и трёх конденсаторов.

Пусть в момент t заряд C_1 и C_3 равен $q(t)$, $t = 0$ — момент переключения, $q(0) = q_0$. Через цепочку прошёл заряд $\Delta q = q_0 - q$, поэтому на C_2 заряд $q_2 = q_0 + \Delta q = 2q_0 - q$, а ток $I = -\dot{q}$. Запишем закон Ома для обхода контура (ЭДС самоиндукции катушки равна сумме напряжений на конденсаторах по обходу, активного сопротивления нет):

$$L\dot{I} = \frac{q}{C} + \frac{q}{C} - \frac{2q_0 - q}{C} = \frac{3q - 2q_0}{C}.$$

С $I = -\dot{q}$:

$$L\ddot{q} + \frac{3}{C}\left(q - \frac{2}{3}q_0\right) = 0.$$

Сместим отсчёт: $x = q - \frac{2}{3}q_0$, тогда $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\dfrac{3}{LC}}$. Начальные

условия: $x(0) = \dfrac{q_0}{3}$, $\dot{x}(0) = -I(0) = 0$. Поэтому

$$q(t) = \frac{q_0}{3}(2 + \cos\omega t), \qquad q_2(t) = q_0\Big(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos\omega t\Big),$$

$$I(t) = -\dot{q} = \frac{\omega q_0}{3}\sin\omega t.$$

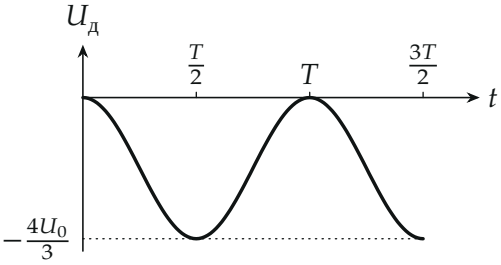
Амплитуда тока $I_0 = \dfrac{\omega q_0}{3} = U_0\sqrt{\dfrac{C}{3L}}$. Напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = U_3 = \frac{U_0}{3}(2 + \cos\omega t), \qquad U_2 = \frac{U_0}{3}(4 - \cos\omega t).$$

Пункт 2. Проверка предположения о диодах. Диод D_1 открылся бы, если бы $\varphi_a - \varphi_d > 0$, диод D_2 — если бы $\varphi_c - \varphi_b > 0$. Найдём эти напряжения:

$$\varphi_a - \varphi_d = U_1 - U_2 = -\frac{2U_0}{3}(1 - \cos\omega t) \le 0,$$

$$\varphi_c - \varphi_b = U_3 - U_2 = -\frac{2U_0}{3}(1 - \cos\omega t) \le 0.$$



Напряжение на каждом из диодов в прямом направлении: оно не положительно, диоды закрыты (на рисунке по оси $U_д$ отложено $U_1 - U_2 = U_3 - U_2$). Оба напряжения всё время неположительны, то есть на диодах обратное напряжение, и они закрыты. Равны нулю они лишь в моменты $t = nT$,

когда конденсаторы вернулись в исходное состояние, — отпирающего напряжения нет и тогда. Предположение верно, тока через диоды нет:

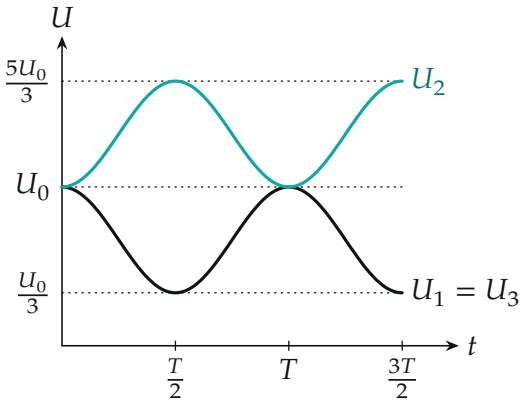
$$I_D = 0.$$

Обратите внимание: ток через катушку меняет направление при $t = T/2$, но диоды остаются закрытыми. Состояние диода определяет знак напряжения на нём, а не направление тока в другом элементе.

Пункт 3. Из выражений для U_1, U_2, U_3 при $\cos\omega t \in [-1, 1]$:

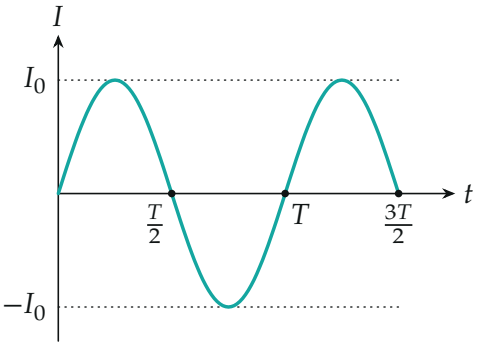
$$U_1, U_3 \in \left[\frac{U_0}{3},\ U_0\right], \qquad U_2 \in \left[U_0,\ \frac{5U_0}{3}\right].$$

Заряды на пластинах знак не меняют: напряжения остаются положительными.



Напряжения на конденсаторах: $U_1 = U_3$ колеблются между $U_0/3$ и U_0, U_2 — между U_0 и $5U_0/3$; в сумме $U_1 + U_3 - U_2$ колеблется около нуля.

Пункт 4. График тока. $I(t) = I_0 \sin\omega t$: синусоида, выходящая из нуля, амплитуда $I_0 = U_0\sqrt{C/(3L)}$, симметричная относительно оси времени. Диоды закрыты и во втором полупериоде, поэтому колебания продолжаются тем же законом.



Ток через катушку: гармонические колебания, период $T = 2\pi\sqrt{LC/3}$.

Пункт 5. Период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{LC}{3}}.$$

Проверка. Размерность: $\sqrt{LC}$ — секунда; $U_0\sqrt{C/L}$ — ампер. Второй способ для периода: при протекании заряда Δq напряжения U_1, U_3 уменьшаются, а U_2 растёт на $\Delta q/C$ каждое, ЭДС цепочки меняется на $3\Delta q/C$ — как у трёх одинаковых конденсаторов, соединённых последовательно (ёмкость $C/3$). По формуле Томсона $T = 2\pi\sqrt{L\cdot C/3}$, то же самое. Закон сохранения энергии при $t = T/4$ ($\cos\omega t = 0$, $U_1 = U_3 = \frac{2}{3}U_0$, $U_2 = \frac{4}{3}U_0$): $\dfrac{C}{2}(\frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9})U_0^2 + \dfrac{LI_0^2}{2} = \dfrac{4}{3}CU_0^2 + \dfrac{1}{6}CU_0^2 = \dfrac{3}{2}CU_0^2$, что равно начальной энергии $3\cdot\dfrac{CU_0^2}{2}$.

Смысл: диоды заперты всё время, и схема — простой контур из катушки и трёх последовательных конденсаторов.

Ответ. 1) $U_1 = U_2 = U_3 = U_0$; 2) $I_D = 0$ (диоды закрыты); 3) $U_1, U_3 \in [U_0/3,\ U_0]$, $U_2 \in [U_0,\ 5U_0/3]$; 4) синусоида $I = I_0\sin\omega t$, $I_0 = U_0\sqrt{C/(3L)}$, из нуля; 5) $T = 2\pi\sqrt{LC/3}$.