Магнитный шнур

Задача 4. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 4] «Магнитный шнур». Тонкий, однородный нерастяжимый гибкий шнур длины l изготовлен из ферромагнетика, причем магнитный момент каждого его маленького элемента направлен вдоль шнура. Один конец шнура удерживают на расстоянии l_1 ($l_1 > l$) от бесконечного прямого провода, по которому течет электрический ток силой I (рис. 13). Пренебрегая силой тяжести и собственным магнитным полем шнура,

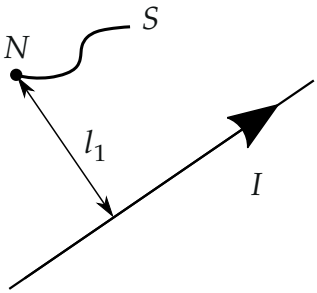


Рис. 13

1. найдите расстояние между концами шнура в состоянии равновесия;
2. на каком расстоянии от провода окажется свободный конец шнура?

Указание. Энергия маленького элемента шнура длиной Δl во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ определяется выражением $\Delta W = -kB\,\Delta l \cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{B}$ и направлением шнура, а k — постоянный коэффициент.

▲ **Решение. Что происходит.** Шнур свободен и гибок, поэтому он займёт положение, при котором его энергия в поле тока минимальна. Главная идея: энергия шнура оказывается пропорциональна углу, на который поворачивается направление на провод при движении вдоль шнура, — и тогда задача сводится к геометрии: надо найти положение, при котором этот угол наибольший. Класс задачи: равновесие по минимуму энергии, где энергия складывается из вкладов малых элементов.

Обозначения. N — закреплённый конец шнура, S — свободный; O — след провода в плоскости, перпендикулярной ему и проходящей через N (на рисунках провод — точка O, ток направлен на нас); r — расстояние от провода; $|ON| = l_1$.

1. Энергия шнура. Разобьём шнур на малые элементы Δl_i. Шнур однородный, поэтому k одинаков для всех, и энергия

$$W = -k \sum_i B_i \cos\varphi_i \, \Delta l_i, \qquad B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_i}.$$

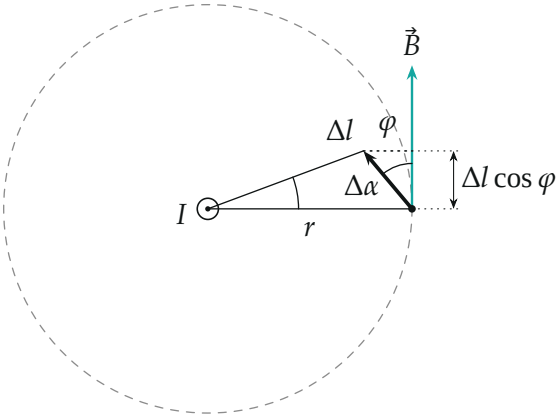
Вектор $\vec{B}$ прямого тока в каждой точке направлен по касательной к окружности радиуса r вокруг провода, в плоскости, перпендикулярной проводу. Поэтому $\Delta l \cos\varphi$ — составляющая элемента вдоль $\vec{B}$, то есть вдоль дуги этой окружности (рисунок ниже); дуга длины $r\,\Delta\alpha$ стягивает угол $\Delta\alpha$ при проводе. Для каждого элемента

$$B\,\Delta l \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\Delta l \cos\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\Delta\alpha.$$

Составляющая элемента вдоль провода к $\vec{B}$ перпендикулярна и вклада не даёт: такой элемент лишь «тратит» длину шнура. Значит, шнуру выгодно лежать целиком в плоскости, перпендикулярной проводу (так и показано на рисунках). Складывая вклады,

$$W = -\frac{k\mu_0 I}{2\pi}\,\alpha,$$

где α — угол, на который поворачивается луч из точки O на шнур при движении вдоль шнура от N к S (в сторону поля; для обратной ориентации моментов картина зеркальна). Минимум W — максимум α.

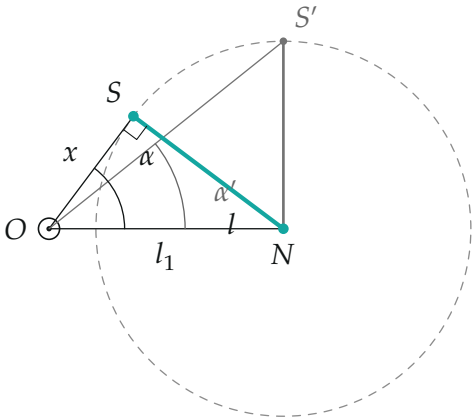


Малый элемент шнура Δl в поле $\vec{B}$ (по касательной к окружности радиуса r): составляющая $\Delta l \cos\varphi$ стягивает угол $\Delta\alpha$ при проводе.

2. Где угол наибольший. Угол α — разность полярных углов концов шнура относительно O: он зависит только от положения свободного конца S, а не от формы шнура. Шнур не может обойти провод вокруг, потому что $l < l_1$: провод лежит вне круга радиуса l с центром N, в котором может оказаться S. Итак, ищем точку этого круга, из которой направление на неё от O повёрнуто на наибольший угол. Это точка касания луча из O с кругом: в ней $\angle OSN = 90°$ (рисунок ниже). Любая другая точка круга, например S', даёт меньший угол $\alpha' < \alpha$. Из прямоугольного треугольника OSN (гипотенуза l_1):

$$\sin\alpha_{\max} = \frac{l}{l_1}, \qquad x = |OS| = \sqrt{l_1^2 - l^2}.$$

В точке касания расстояние $|NS|$ равно l — ровно длине шнура. Значит, шнур в равновесии натянут по прямой: он целиком лежит на касательной из N к окружности. Обратите внимание: найденная точка лежит на границе достижимой области, поэтому шнур выпрямлен до предела; изогнуть его — значит приблизить конец к N и уменьшить угол.

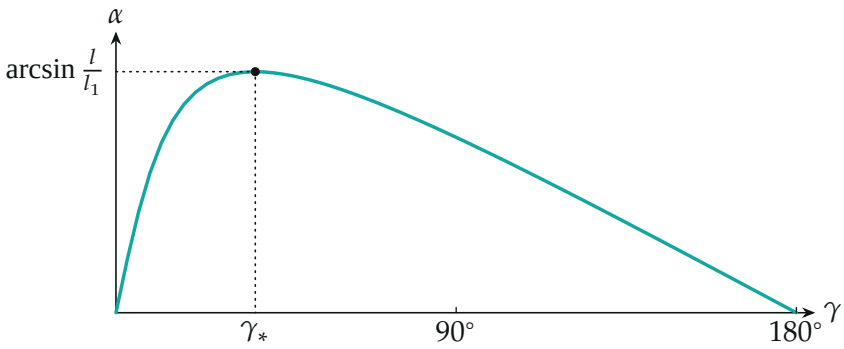


Свободный конец достижим в круге радиуса l с центром N. Угол α наибольший в точке касания S; для другой точки круга (S') угол α' меньше.

Проверим вторым способом для прямого шнура. Пусть он образует с NO угол γ. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{l\sin\gamma}{l_1 - l\cos\gamma}.$$

Производная по γ равна нулю при $l_1\cos\gamma = l$, то есть когда шнур перпендикулярен OS, и тогда $\sin\alpha = l/l_1$ — тот же результат (график ниже).



Угол α прямого шнура в зависимости от угла γ между шнуром и NO (при $l_1 = 5, l = 4$): максимум при $\cos\gamma_* = l/l_1$.

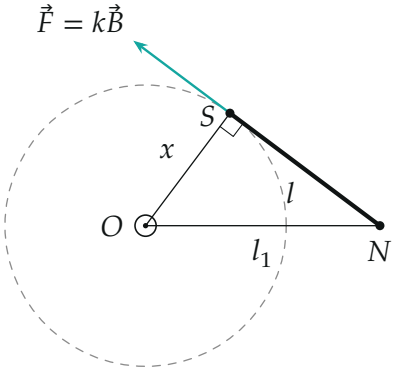
Пункт 1. Шнур натянут по прямой, поэтому расстояние между его концами равно длине шнура:

$$|NS| = l.$$

Пункт 2. Свободный конец шнура находится от провода на расстоянии

$$x = \sqrt{l_1^2 - l^2}.$$

Проверка. Силовой способ. Энергия $W = -\frac{k\mu_0 I}{2\pi}\alpha$ зависит только от положений концов, поэтому на каждый конец действует сила, равная $\pm k\vec{B}$ в его точке, как на заряд в электрическом поле. Шнур в равновесии, значит, сила $k\vec{B}(S)$, действующая на свободный конец, уравновешена натяжением шнура: она направлена вдоль шнура. Поле $\vec{B}(S)$ направлено перпендикулярно OS, значит, шнур перпендикулярен OS — то же самое.



Сила $k\vec{B}$ на свободном конце идёт по касательной к окружности радиуса x и вдоль шнура, поэтому $NS \perp OS$.

Пределы: при $l \to 0$ получаем $x \to l_1$ (короткий шнур остаётся на месте); при $l \to l_1$ получаем $x \to 0$ (конец подходит к проводу).

Смысл: шнур вытягивается в прямую вдоль силы поля и смотрит на провод под наибольшим углом.

Ответ. 1) расстояние между концами шнура равно l (шнур вытянут в прямую); 2) $x = \sqrt{l_1^2 - l^2}$.