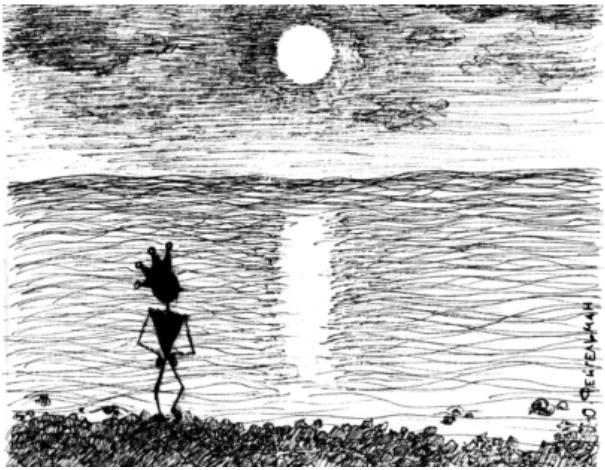
# Русалочка

**Задача 5.** [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 11 класс, теоретический тур, задача 5] «Русалочка». В открытом море вода совсем синяя, как лепестки самых красивых васильков, и прозрачная, как чистое стекло, — но зато и глубоко там! Ни один якорь не достанет до дна; на дно моря пришлось бы поставить одну на другую много-много колоколен, только тогда бы они могли высунуться из воды. На самом дне живут русалки.

Г.Х. Андерсен.



Ясной ночью принц, ростом $H = 1{,}8$ м, мечтал на берегу спокойного Тихого океана и смотрел на лунную дорожку, которая начиналась от него на расстоянии $D_\text{П} = 5$ м по горизонтали и имела длину $L_\text{П} = 50$ м. В это же самое время у берега под водой на глубине $H$ лежала Русалочка, тоже о чем-то мечтая.

1. На каком расстоянии $D_\text{Р}$ от себя (тоже по горизонтали) лунную дорожку будет видеть Русалочка?
2. Какой длины $L_\text{Р}$ будет эта дорожка?

Считайте, что легкий бриз создает мелкую одинаковую рябь по всей поверхности океана. Показатель преломления морской воды $n = 1{,}35$. Угловым размером Луны можно пренебречь.

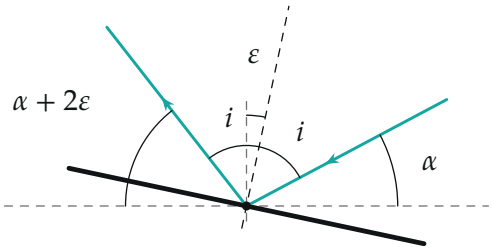
▲ **Решение. Что происходит.** Рябь — это множество маленьких наклонных площадок, наклон которых меняется от $-\varphi$ до $+\varphi$. Точка воды входит в лунную дорожку для наблюдателя, если у неё есть площадка, которая направляет в его глаз лучи Луны: у принца — отразив их, у русалочки — пропустив их в воду (преломив). Раз наклон ограничен, у дорожки есть два крайних луча, ближний и дальний. Главная идея: по данным принца находим два неизвестных — высоту Луны $\alpha$ и предельный наклон $\varphi$, — а затем применяем их для русалочки с законом преломления. Класс задачи: геометрическая оптика на наклонной границе, с отражением и преломлением.

**Обозначения.** $\alpha$ — угол Луны над горизонтом (лучи Луны параллельны); $\varepsilon$ — наклон площадки: нормаль к ней отклонена от вертикали на $\varepsilon$ в вертикальной плоскости луча, $\varepsilon > 0$ — в сторону Луны, $|\varepsilon| \le \varphi$. Глаза принца и русалочки находятся на расстоянии $H$ над водой и под водой на одной вертикали; $D$ — горизонтальное расстояние до точки поверхности, откуда идёт луч в глаз.

**1. Принц: отражение.** Рассмотрим площадку с наклоном $\varepsilon$ (рисунок ниже). Нормаль к ней составляет с горизонталью угол $90^\circ - \varepsilon$, угол падения $i = 90^\circ - \varepsilon - \alpha$. По закону отражения угол отражения тоже $i$, и отражённый луч лежит по другую сторону нормали. Его направление отсчитывается от того же горизонтального направления, поэтому угол отражённого луча с горизонталью

$$\psi = \alpha + 2\varepsilon.$$

Наклон площадки на $\varepsilon$ поворачивает отражённый луч на $2\varepsilon$.




*Отражение от наклонной площадки: $\psi = \alpha + 2\varepsilon$.*

Луч, попавший в глаз на высоте $H$ от точки на расстоянии $D$, идёт под углом $\psi$, $\operatorname{tg}\psi = H/D$. Ближнему краю дорожки ($D_\text{П}$) соответствует наибольший угол, то есть $\varepsilon = +\varphi$; дальнему ($D_\text{П} + L_\text{П}$) — наименьший, $\varepsilon = -\varphi$:

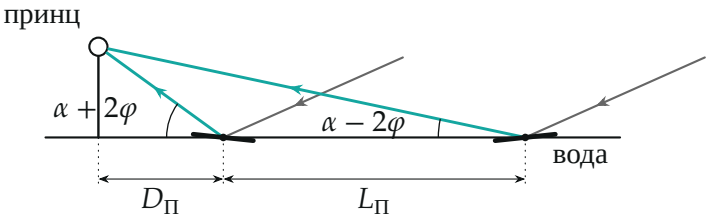
$$\operatorname{tg}(\alpha + 2\varphi) = \frac{H}{D_\text{П}}, \qquad \operatorname{tg}(\alpha - 2\varphi) = \frac{H}{D_\text{П} + L_\text{П}}.$$

Неизвестными осталось найти $\alpha$ и $\varphi$. Складывая и вычитая углы,

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_\text{П}} + \operatorname{arctg}\frac{H}{D_\text{П} + L_\text{П}}\right) \approx 0{,}189\ (10{,}8^\circ),$$

$$\varphi = \frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{H}{D_\text{П}} - \operatorname{arctg}\frac{H}{D_\text{П} + L_\text{П}}\right) \approx 0{,}078\ (4{,}5^\circ).$$

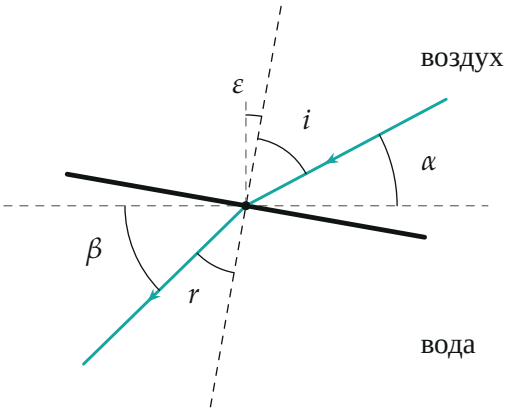
Здесь $\operatorname{arctg} 0{,}36 \approx 0{,}346$ и $\operatorname{arctg} 0{,}0327 \approx 0{,}033$.




*Принц: крайние лучи дорожки идут под углами $\alpha + 2\varphi$ (ближний край) и $\alpha - 2\varphi$ (дальний). Серые лучи — лучи Луны под углом $\alpha$. Рисунок условный: углы увеличены.*

**2. Русалочка: преломление.** Теперь луч Луны (под углом $\alpha$) входит в воду через площадку с наклоном $\varepsilon$ и идёт под водой под углом $\beta$ к горизонту вниз (рисунок ниже). Нормаль повёрнута на $\varepsilon$, поэтому угол падения $i = 90^\circ - \alpha - \varepsilon$, а угол преломления $r = 90^\circ - \beta - \varepsilon$ (оба отсчитываются от нормали). Закон Снеллиуса $\sin i = n \sin r$ для границы воздух — вода даёт

$$\cos(\alpha + \varepsilon) = n\cos(\beta + \varepsilon), \qquad \beta(\varepsilon) = \arccos\frac{\cos(\alpha + \varepsilon)}{n} - \varepsilon.$$




*Преломление на площадке с наклоном ε: углы падения i и преломления r отсчитываются от наклонной нормали, β — угол луча в воде с горизонталью.*

Зачем нужен именно такой вид: $\beta$ входит в формулу для расстояния напрямую, через $\operatorname{tg}\beta = H/D$. Функция $\beta(\varepsilon)$ убывает: её производная

$$\frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{\sin(\alpha+\varepsilon)}{\sqrt{n^2-\cos^2(\alpha+\varepsilon)}} - 1 < 0,$$

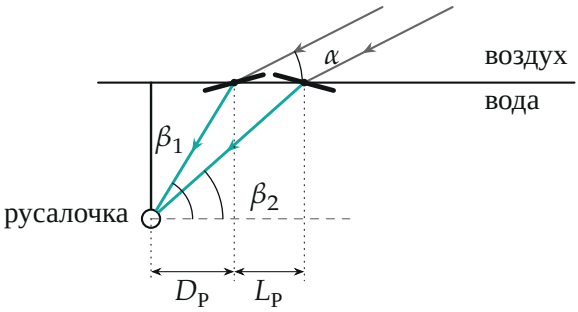
потому что $n^2 - \cos^2(\alpha+\varepsilon) > \sin^2(\alpha+\varepsilon)$. Значит, крайние лучи — при крайних наклонах, но ближнему краю дорожки соответствует $\varepsilon = -\varphi$ (наибольший угол $\beta$), а не $+\varphi$, как у принца:

$$n\cos(\beta_1 - \varphi) = \cos(\alpha - \varphi), \qquad n\cos(\beta_2 + \varphi) = \cos(\alpha + \varphi),$$

$$\beta_1 = \arccos\frac{\cos(\alpha-\varphi)}{n} + \varphi \approx 0{,}822,$$

$$\beta_2 = \arccos\frac{\cos(\alpha+\varphi)}{n} - \varphi \approx 0{,}697.$$

Обратите внимание: у принца и у русалочки порядок краёв противоположный — при отражении сильнее наклон в сторону Луны даёт больший угол луча, при преломлении — наоборот.

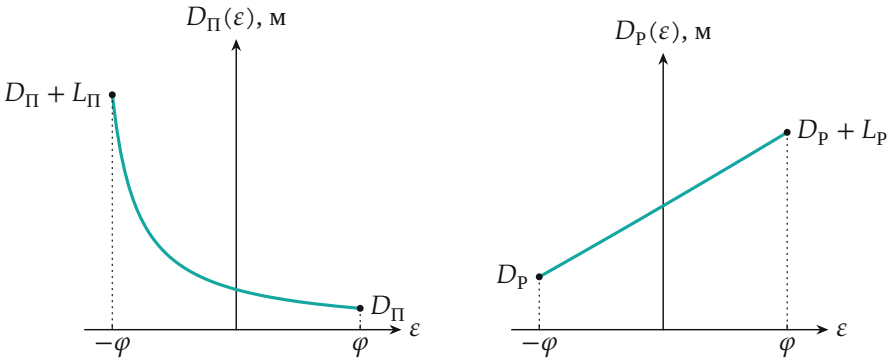



*Русалочка: лучи Луны, преломившись на площадках с наклоном $-\varphi$ и $+\varphi$, идут под углами $\beta_1 > \beta_2$ и попадают в глаз. Рисунок условный: углы и наклон увеличены.*

Расстояния: $\operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{H}{D_\text{Р}}$ и $\operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{H}{D_\text{Р} + L_\text{Р}}$, откуда

$$D_\text{Р} = H \operatorname{ctg}\beta_1 \approx 1{,}67 \text{ м},$$

$$L_\text{Р} = H \operatorname{ctg}\beta_2 - D_\text{Р} \approx 2{,}15 \text{ м} - 1{,}67 \text{ м} \approx 0{,}48 \text{ м}.$$




*Расстояние до точки, откуда идёт луч в глаз, как функция наклона площадки $\varepsilon$ (по вычисленным точкам): у принца от 5 до 55 м, у русалочки от 1,67 до 2,15 м.*

**Проверка.** Предел $\varphi \to 0$ (гладкая вода): формула даёт $\cos\beta = \cos\alpha/n$ — закон преломления для плоской границы, дорожка стягивается в точку. Предел $n \to 1$: $\beta = \alpha$, преломления нет. Независимо

проверено прямым прослеживанием лучей по векторным законам отражения и преломления: для $\varepsilon = \pm\varphi$ получены расстояния 5 и 55 м у принца и 1,674 и 2,151 м у русалочки, совпадающие с формулами. Размерность: расстояния в метрах.

Смысл: рябь растягивает дорожку у принца до 50 м, но русалочка видит её узкой полоской: из-за преломления диапазон углов сужается (у принца $4\varphi \approx 0{,}31$ рад, у русалочки $\beta_1 - \beta_2 \approx 0{,}12$ рад), а глаз русалочки близок к поверхности, и это сильно уменьшает длину.

**Ответ.** 1) $D_\text{р} \approx 1{,}67$ м; 2) $L_\text{р} \approx 0{,}48$ м.