Магнитики

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 2] «Магнитики».

Исследуйте зависимость силы F отталкивания двух, расположенных соосно, магнитов от расстояния x между ними. Для изменения внешней силы, прижимающей один магнит к другому, воспользуйтесь латунными (немагнитный материал) стержнями и деревянным желобом. Кроме этого, вы можете проводить измерения на двух углах наклона желоба, используя для его крепления два больших отверстия в вертикальной части штатива. Предложите способ уменьшения влияния силы трения.

1. Постройте график полученной экспериментальной зависимости $F(x)$.
2. В предположении, что полученная зависимость является степенной функцией вида $F = kx^{-\beta}$, где k — размерный коэффициент, а β — целое число, равное 1 или 2, найдите значения k и β.
3. Не наклоняя желоб, определите силу трения скольжения $F_{\text{тр}}$ и коэффициент трения μ между магнитом и измерительной лентой, наклеенной на желоб.
4. Оцените погрешность полученных результатов.

Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

Оборудование. Деревянный желоб с неподвижным магнитом, системой крепления к штативу и наклеенными полосками измерительной ленты, деревянный штатив, подвижный магнит массой $m_{\text{м}} = 2{,}10 \pm 0{,}05$ г, латунные стержни массой $m_1 = 6{,}00 \pm 0{,}05$ г, $m_2 = 14{,}3 \pm 0{,}1$ г и $m_3 = 28{,}7 \pm 0{,}3$ г, измерительная лента, разделитель магнитов из медной проволоки для облегчения их разъединения в случае случайного слипания, миллиметровая бумага (2 листа формата А4) для построения графиков.

ВНИМАНИЕ. Наносить какие-либо пометки на обе стороны наклеенной измерительной ленты и на сам деревянный желоб категорически запрещено!

▲ **Решение. Что происходит.** Это экспериментальная задача на равновесие тела на наклонной плоскости. Подвижный магнит лежит в наклон-

ном желобе ниже неподвижного и прижат к нему скатывающей силой — проекцией силы тяжести на желоб. Он останавливается там, где отталкивание магнитов равно скатывающей силе. Нагружая магнит латунными стержнями (латунь не магнитится и на отталкивание не влияет), меняем прижимающую силу и по положению равновесия получаем точки $F(x)$. Мешает трение покоя: магнит может застрять в целой зоне положений. Его убираем постукиванием.

Обозначения. M — масса магнита вместе со стержнями на нём; α — угол наклона желоба; x — расстояние между ближайшими торцами магнитов; N — сила реакции желоба; X и $X+L$ — начальное и конечное расстояния в опыте с трением.

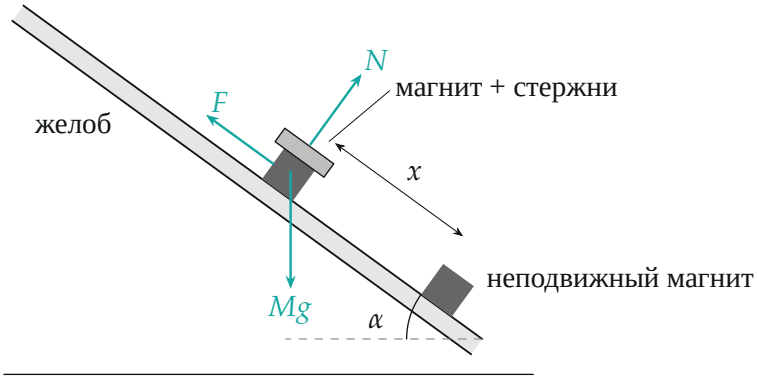

Рис. 1. Поясняющий рисунок: подвижный магнит со стержнями в наклонном желобе ниже неподвижного магнита. В равновесии отталкивание F уравновешивает скатывающую силу.

Пункт 1. Измерения и график $F(x)$.

1.1. Условие равновесия. Второй закон Ньютона для подвижного магнита со стержнями в равновесии, в проекции на ось вдоль желоба вниз (трения нет — см. п. 1.2):

$$Mg\sin\alpha - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F = Mg\sin\alpha.$$

Ось выбрана вдоль желоба, потому что только вдоль неё магнит может двигаться, и реакция N на эту ось не проецируется.

1.2. Как убрать трение. Пока магнит лежит на ленте, трение покоя может держать его в любой точке, где $|F - Mg\sin\alpha| \le F_{тр}$, — получается не точка, а зона. Будем легко постукивать по желобу: магнит на мгновения подпрыгивает, в эти мгновения $N = 0$ и трения нет, и он мелкими шагами приходит в положение, где силы вдоль желоба равны в точности. Каждое x измеряем трижды, расхождение — около 1 мм.

1.3. Данные. Желоб крепим под двумя углами: $\sin\alpha_1 = 0{,}74$ и $\sin\alpha_2 = 0{,}61$. Комбинации стержней дают по 8 масс (М — магнит, 1, 2, 3 — стержни):

	M, г	x_1, мм	F_1, мН	x_2, мм	F_2, мН
М	2,1	28	15,2	30	12,6
М+1	8,1	18	58,7	20	48
М+2	16,4	14	119	16	98
М+1+2	22,4	12	162	13	134
М+3	30,8	11	223	12	184
М+1+3	36,8	10	267	11	220
М+2+3	45,1	9	327	10	270
М+1+2+3	50,1	9	363	10	300

$F_1 = Mg \cdot 0{,}74$, $F_2 = Mg \cdot 0{,}61$. Точки обоих углов ложатся на одну кривую (рис. 2) — значит, сила зависит только от x, а не от того, как мы её создали: метод работает.

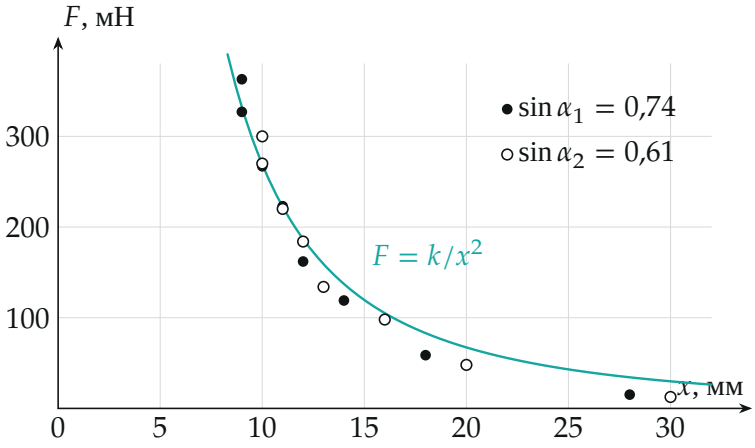

Рис. 2. Сила отталкивания $F(x)$: точки при двух углах наклона и кривая k/x^2 с найденным k.

Пункт 2. Показатель β и коэффициент k.

2.1. Спрямление. Если $F = kx^{-\beta}$, то в осях F — $x^{-\beta}$ точки ложатся на прямую через начало координат с наклоном k. Проверим оба варианта (рис. 3 и 4).

x, мм	30	28	20	18	16	14	12	9
x^{-1}, м$^{-1}$	33	36	50	56	63	71	83	111
x^{-2}, 10^3 м$^{-2}$	1,1	1,3	2,5	3,1	3,9	5,1	6,9	12,3

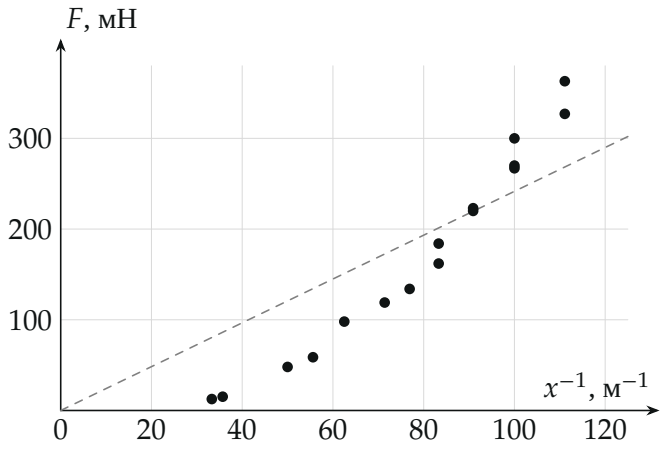

Рис. 3. В осях F — x^{-1} точки идут дугой, выгнутой вниз, и прямая через начало координат (пунктир) по ним не проходит: $\beta \neq 1$.

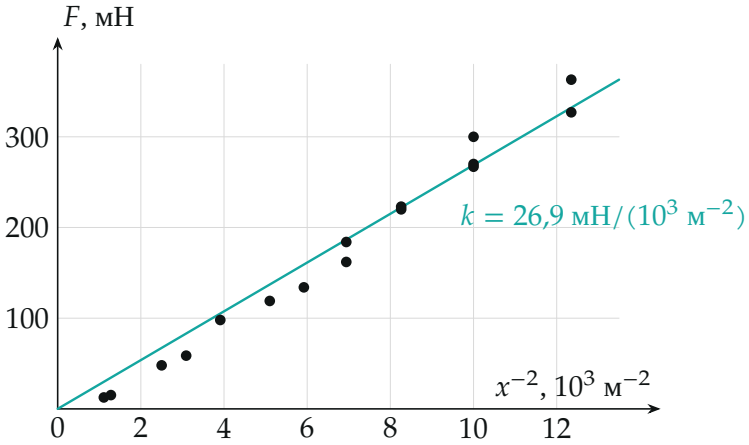

Рис. 4. В осях F — x^{-2} точки лежат около прямой через начало координат: $\beta = 2$. Наклон прямой — коэффициент k.

2.2. Выбор β. В осях $F(x^{-1})$ точки заметно отходят от прямой через начало: прямая, проведённая по ним «как получится», отсекла бы на оси F отрицательный отрезок -170 мН, что бессмысленно (сила при $x \to \infty$ должна стремиться к нулю). В осях $F(x^{-2})$ точки лежат вокруг прямой через начало с разбросом $\approx$ 18 мН — втрое меньше, чем для $\beta = 1$ (55 мН). Значит, $\beta = 2$.

2.3. Коэффициент k — наклон прямой на рис. 4 (метод наименьших квадратов, прямая через начало координат):

$$k = \frac{\sum F_i x_i^{-2}}{\sum x_i^{-4}} = 2{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Проверка по одной точке: $x = 10$ мм, $F = k/x^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-5}/10^{-4} = 0{,}27$ Н $= 270$ мН — как в таблице.

Пункт 3. Трение без наклона желоба.

3.1. Опыт. Желоб горизонтален. Пододвигаем подвижный магнит к неподвижному на расстояние X и отпускаем. Магнит отталкивается, разгоняется, тормозится трением и останавливается на расстоянии $X + L$ (рис. 5). Повторяем на разных участках ленты.

3.2. Теорема об изменении кинетической энергии магнита от старта до остановки: в начале и в конце он покоится, поэтому сумма работ

равна нулю. Работа отталкивания — площадь под графиком $F(x)$ от X до $X + L$, работа трения скольжения $-F_{\text{тр}}L$:

$$\int_X^{X+L} \frac{k}{x^2}\,dx - F_{\text{тр}}L = 0,$$

$$k\left(\frac{1}{X} - \frac{1}{X+L}\right) = F_{\text{тр}}L \quad \Rightarrow \quad F_{\text{тр}} = \frac{k}{X\,(X+L)}.$$

Площадь можно взять и прямо по графику рис. 2, считая клетки, — закон k/x^2 для этого не нужен. В опыте организаторов

$$F_{\text{тр}} = (11 \pm 2)\ \text{мН};$$

например, при $X = 20$ мм это отвечает остановке при $X + L = k/(F_{\text{тр}}X) \approx 12$ см.

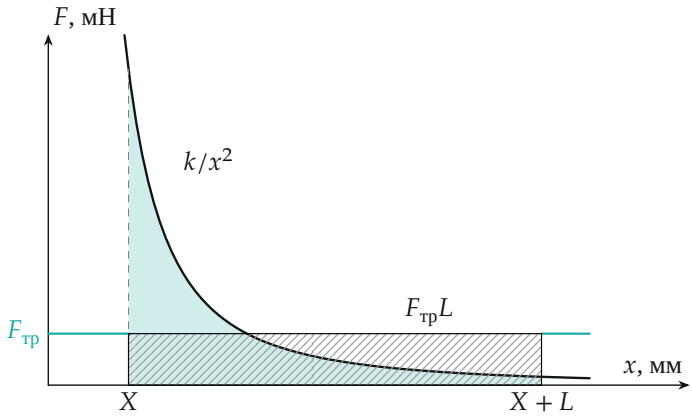

Рис. 5. Площадь под графиком $F(x)$ от X до $X + L$ (бирюзовая) — работа отталкивания; она равна площади заштрихованного прямоугольника $F_{тр}L$ — работе трения.

3.3. Второй способ — граница застоя. Без постукивания магнит в горизонтальном желобе может стоять везде, где отталкивание не больше силы трения покоя: $k/x^2 \le F_{\text{тр}}$. Самое близкое положение покоя x_0 —

граница этой зоны: $F_{тр} = k/x_0^2$; при $F_{тр} = 11$ мН $x_0 = \sqrt{k/F_{тр}} \approx 5$ см. Измерив x_0, получаем $F_{тр}$ интерполяцией графика $F(x)$.

3.4. Коэффициент трения. Желоб имеет V-образное сечение с прямым углом между стенками, и магнит опирается на обе стенки (рис. 6). Второй закон Ньютона для магнита в проекции на вертикаль: $2N\cos 45° = m_м g$, то есть $N = m_м g/\sqrt{2}$ на каждую стенку. Трение скольжения действует на обеих стенках:

$$F_{тр} = \mu \cdot 2N = \sqrt{2}\,\mu m_м g,$$

$$\mu = \frac{F_{тр}}{\sqrt{2}\,m_м g} = \frac{0{,}011}{1{,}41 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}8} = 0{,}37.$$

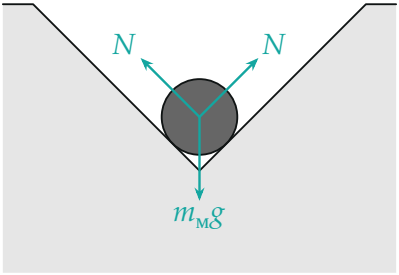

Рис. 6. Сечение горизонтального желоба: магнит касается двух стенок, угол между ними 90°. Реакции стенок перпендикулярны им; в сумме по вертикали они дают $\sqrt{2}N = m_м g$.

Пункт 4. Погрешности.

- Сила: $\Delta F/F = \Delta M/M + \Delta(\sin\alpha)/\sin\alpha \approx 2\% + 2\%$, массы известны с точностью 1–2%, синус угла — около 2%.
- Расстояние: $\Delta x \approx 1$ мм при $x = 9$–30 мм, то есть 3–11%; в x^{-2} это удваивается: 6–22%. Отсюда разброс точек рис. 4.
- Наклон k: по разбросу точек вокруг прямой и крайним прямым, проведённым через начало координат, $\Delta k \approx 15\%$: $k = (2{,}7 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-5}$ Н·м^2.
- $F_{тр}$: разброс повторных опытов на разных участках ленты, $\approx 20\%$: (11 ± 2) мН. В μ сюда добавляется 2% массы магнита.

Обратите внимание: «равновесие» без постукивания — это не точка, а зона шириной в несколько миллиметров; при $x \approx 10$ мм, где сила меняется на 20% на миллиметр, такая ошибка испортила бы весь график.

Проверка. Размерность: $[k] = [F][x^2] = \text{Н} \cdot \text{м}^2$, $[F_{\text{тр}}] = \text{Н} \cdot \text{м}^2/\text{м}^2 = \text{Н}$. Логарифмический график (его не требовали) даёт наклон $\beta \approx 2{,}7$ — из двух разрешённых значений ближе 2, как и по спрямлению. Сила трения 11 мН много меньше сил основного опыта (15–360 мН), поэтому остаточное трение после постукивания на результаты пунктов 1–2 почти не влияет.

Опыт превращает измерение силы в измерение длины: силу задаёт груз на наклонной плоскости, а прибор, «взвешивающий» отталкивание, — линейка.

Ответ. 1) график $F(x)$ — рис. 2; 2) $\beta = 2$, $k = (2{,}7 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-5}$ Н·м^2; 3) $F_{\text{тр}} = \dfrac{k}{X(X+L)} = (11 \pm 2)$ мН, $\mu = \dfrac{F_{\text{тр}}}{\sqrt{2}\, m_{\text{м}} g} = 0{,}37 \pm 0{,}02$ (результаты зависят от комплекта оборудования).