Навигация

Задача 1. [ВсОШ 2018/19, 9 класс, задача 1] «Навигация». Движущийся равномерно и прямолинейно корабль прошел точку A, находящуюся на расстоянии $L = 5$ км от пристани B (рис. 1). Через некоторое время τ после этого от корабля и от пристани навстречу друг другу отправились два катера. Перерисуйте рисунок в бланк решений и построениями с помощью циркуля и линейки без делений определите точку, в которой находился корабль в момент встречи катеров, если известно, что:

- катера двигались по прямой с одинаковыми скоростями, составляющими $3/8$ от скорости корабля;
- время движения катеров от их старта до встречи также равно τ;
- при встрече катеров корабль вновь оказался на расстоянии L от пристани.

Опишите последовательность построений и найдите расстояние (в километрах), которое проходит катер за время τ? Ветра и течения нет.

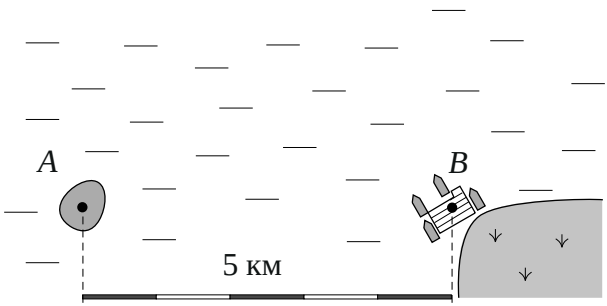

Рис. 1

Примечание: на рисунке расстояние AB разделено на 5 равных интервалов.

▲ **Решение. Что происходит.** Корабль за два равных промежутка τ проходит два равных отрезка AC и CK одной прямой. Пристань B одинаково удалена от A и K, поэтому лежит на серединном перпендикуляре к AK — и катера, идущие друг другу навстречу от C и от B, движутся по этому перпендикуляру. Получаем прямоугольный треугольник ACB с

отношением катетов, заданным отношением скоростей; по теореме Пифагора находятся длины, а построение сводится к пересечению двух окружностей. Класс задачи — «кинематика + геометрическое построение».

Обозначения. v — скорость корабля; $u = \frac{3}{8}v$ — скорость катеров; C — положение корабля в момент старта катеров; K — в момент встречи катеров; O — точка встречи (рис. 2).

1. Перемещения корабля. Корабль движется равномерно и прямолинейно, промежутки $A \to C$ и $C \to K$ длятся по τ:

$$AC = CK = v\tau,$$

т. е. C — середина отрезка AK.

2. Где идут катера. По условию $BK = BA = L$: треугольник ABK равнобедренный, а BC — его медиана к основанию, значит, и высота: $BC \perp AK$. Катера стартуют из C и B и идут по прямой навстречу друг другу — по отрезку CB. За время τ каждый проходит $u\tau$, оба вместе — весь отрезок:

$$CB = 2u\tau = \frac{3}{4}v\tau.$$

Скорости катеров равны, поэтому встреча — в середине O отрезка CB.

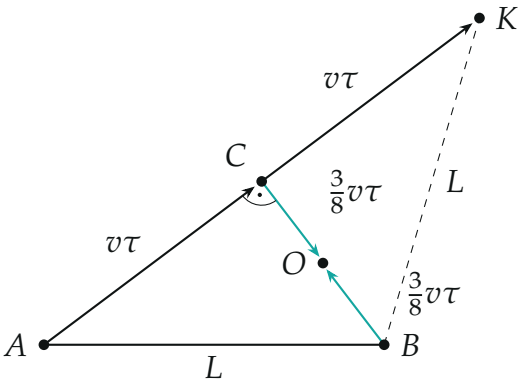

Рис. 2. Движение корабля ($A \to C \to K$) и катеров (бирюзой) за время 2τ.

3. Теорема Пифагора для треугольника ACB (прямой угол при C):

$$(v\tau)^2 + \left(\frac{3}{4}v\tau\right)^2 = L^2 \;\Rightarrow\; \frac{5}{4}v\tau = L,$$

$$v\tau = \frac{4}{5}L = 4\text{ км}, \quad CB = \frac{3}{5}L = 3\text{ км}.$$

Треугольник ACB — египетский, $3:4:5$. Путь каждого катера

$$u\tau = \frac{1}{2}CB = \frac{3}{10}L = 1{,}5\text{ км}.$$

4. Построение циркулем и линейкой (рис. 3). Отрезок AB разбит на 5 равных частей по 1 км, так что раствор циркуля 3 км и 4 км берём прямо со шкалы.

1. Окружность 1: центр B, радиус BA — на ней конечное положение корабля.
2. Окружность 2: центр B, радиус 3 деления; окружность 3: центр A, радиус 4 деления. Их точка пересечения — C.
3. Прямая AC до пересечения с окружностью 1 даёт искомую точку K (проверка: $CK = AC$).
4. Середину O отрезка CB (место встречи) находим обычным построением серединного перпендикуляра.

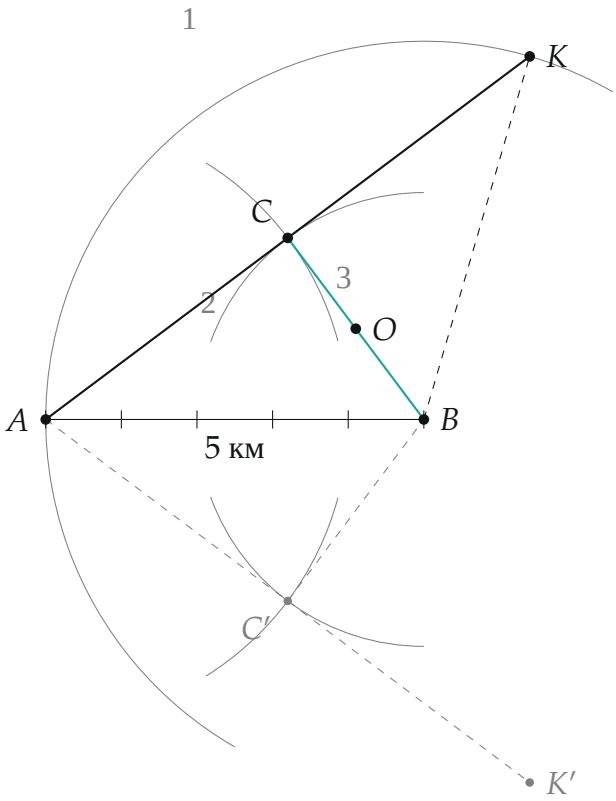

Рис. 3. Построение: окружности 1, 2, 3 и точки C, K, O; серым — зеркальное решение.

Обратите внимание: окружности 2 и 3 пересекаются в двух точках, симметричных относительно AB. Направление движения корабля на рисунке не задано, поэтому оба решения равноправны: K и K' (серым на рис. 3).

Проверка. Расстояние BK: по координатам (A в начале, $B = (5; 0)$ км) $C = (3{,}2; 2{,}4)$, $K = (6{,}4; 4{,}8)$, $BK = \sqrt{1{,}4^2 + 4{,}8^2} = 5$ км $= L$ — условие выполнено. Отношение путей корабля и катера за τ: $4 : 1{,}5 = 8 : 3$ — как отношение скоростей.

Ответ. Точка K — пересечение прямой AC с окружностью радиуса L с центром B, где C — пересечение окружностей радиусов 3 км (центр B) и 4 км (центр A); катер за время τ проходит 1,5 км.