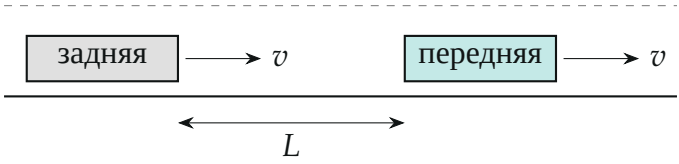
Безопасная дистанция

Задача 2. [ВсОШ 2018/19, 9 класс, задача 2] «Безопасная дистанция». По прямому участку дороги с одинаковой скоростью v друг за другом едут две машины, одна из которых при торможении замедляется с ускорением a_1, а другая с ускорением a_2. Если начнет тормозить водитель передней машины, то водитель задней среагирует и нажмет на педаль тормоза не сразу, а с задержкой $\tau = 1{,}0$ с. В зависимости от того, какая из машин будет ехать впереди, минимальная безопасная дистанция, позволяющая избежать столкновения между ними, окажется равной либо $L_1 = 5$ м, либо $L_2 = 40$ м. Определите, с какой скоростью едут машины.



Поясняющий рисунок: машины перед началом торможения.

▲ **Решение. Что происходит.** Пути машин — площади под графиками $v(t)$, а сокращение дистанции — площадь между графиками, пока задняя едет быстрее передней. Опаснее всего момент, когда скорости сравнялись (или обе машины стоят): после него задняя уже не сближается. Для двух порядков машин получаются два разных сценария: если сзади слабо тормозящая машина — сближение идёт до полной остановки; если сзади сильно тормозящая — она может «догнать» переднюю по скорости ещё на ходу. Класс задачи — «графики скорости, путь как площадь».

Обозначения. Пусть $a_1 < a_2$ (машину с меньшим замедлением назовём «слабой»); t — время от начала торможения передней машины; $q = \dfrac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}$ — комбинация ускорений, которая войдёт в ответ.

1. Сзади слабая машина (a_1). Задняя едет со скоростью v ещё время τ, а потом тормозит медленнее передней — её скорость всё время не

меньше скорости передней (рис. 1), сближение идёт до полной остановки задней. Минимальная дистанция — разность путей до остановки:

$$L = \left(v\tau + \frac{v^2}{2a_1}\right) - \frac{v^2}{2a_2} = v\tau + \frac{v^2}{2}\cdot\frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = v\tau + \frac{v^2}{2q}.$$

Это большая из двух дистанций, т. е. L_2.

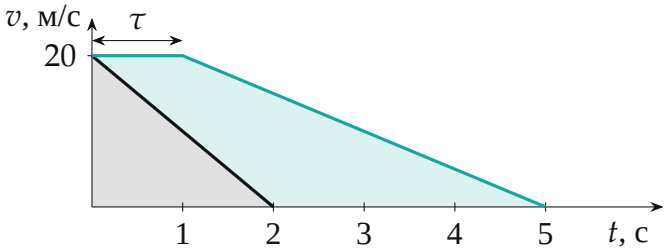


Рис. 1. Сзади слабая машина (бирюзой — задняя, a_1; чёрным — передняя, a_2): путь задней (бирюзовая площадь) больше пути передней (серая) на L_2. Числа — пример с $a_1 = 5$ м/с^2, $a_2 = 10$ м/с^2.

2. Сзади сильная машина (a_2). Передняя тормозит с a_1, задняя через τ — с a_2 и быстро теряет скорость. Скорости сравниваются в момент t_*, когда передняя ещё едет (рис. 2), если

$$\tau + \frac{v}{a_2} < \frac{v}{a_1} \quad\Longleftrightarrow\quad v > q\tau.$$

До t_* задняя быстрее — дистанция сокращается, после — растёт. Сокращение равно площади треугольника между графиками с основанием (по вертикали) $v - v_1$ и высотой τ:

$$L = \frac{1}{2}\tau\,(v - v_1).$$

Скорость в момент t_* из кинематики обеих машин: $v - v_1 = a_1 t_*$ и $v - v_1 = a_2(t_* - \tau)$. Отсюда $t_* = \frac{a_2\tau}{a_2 - a_1}$ и

$$v - v_1 = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1}\tau = q\tau, \qquad L_1 = \frac{1}{2}q\tau^2.$$

Эта дистанция не зависит от v — лишь бы выполнялось $v > q\tau$.

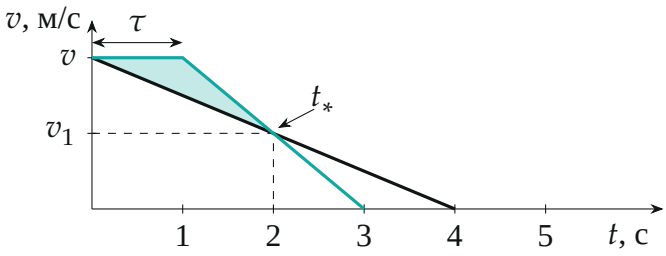


Рис. 2. Сзади сильная машина (бирюзой — задняя, a_2; чёрным — передняя, a_1): дистанция сокращается на бирюзовый треугольник, пока скорости не сравняются в момент t_*.

3. Скорость. Из пункта 2 $q = \dfrac{2L_1}{\tau^2} = 10$ м/с^2. Подставляем в пункт 1:

$$L_2 = v\tau + \frac{v^2\tau^2}{4L_1} \;\Rightarrow\; (v\tau)^2 + 4L_1(v\tau) - 4L_1L_2 = 0.$$

Положительный корень:

$$v = \frac{2L_1}{\tau}\left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} - 1\right) = \frac{2 \cdot 5}{1{,}0}(\sqrt{9} - 1)\ \text{м/с} = 20\ \text{м/с}.$$

Условие сценария пункта 2 выполнено: $v = 20$ м/с $> q\tau = 10$ м/с.

4. Как меняется дистанция. На рис. 3 — дистанция между машинами во втором сценарии при $L = L_1$ (тот же пример $a_1 = 5$, $a_2 = 10$ м/с^2, $q = 10$ м/с^2): она падает до нуля ровно при $t_* = 2$ с и потом снова растёт. Это и значит, что L_1 — минимальная безопасная дистанция.

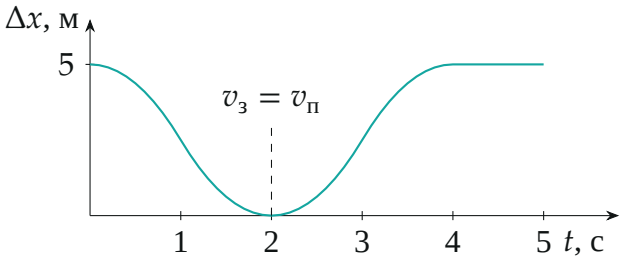


Рис. 3. Дистанция $\Delta x(t)$ во втором сценарии: касание нуля в момент равенства скоростей.

Обратите внимание: если по привычке считать, что и во втором сценарии машины сближаются до полной остановки, получится $L_1 = v\tau - \frac{v^2}{2q}$ и $v = \frac{L_1+L_2}{2\tau} = 22{,}5$ м/с. Но при таком v условие $v < q\tau$ не выполняется — ответ противоречит своему предположению. Сценарий нужно проверять.

Проверка. Размерность: $[L/\tau] =$ м/с. Подстановка: $v\tau + \frac{v^2}{2q} = 20 + \frac{400}{20} = 40$ м $= L_2$; $\frac{1}{2}q\tau^2 = 5$ м $= L_1$. Сценарий «встреча на ходу» выполняется при $L_2/L_1 > 3$ (подставили $v = q\tau$ на границе: $L_2 = q\tau^2 + \frac{q\tau^2}{2} = 3L_1$); у нас $L_2/L_1 = 8$.

Ответ. $v = \frac{2L_1}{\tau}\left(\sqrt{1 + \frac{L_2}{L_1}} - 1\right) = 20$ м/с.