Стремянка

Задача 3. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 3] «Стремянка». На рисунке 2 изображена упрощённая модель лестницы-стремянки, состоящей из соединённых шарнирно легкой опоры и массивной части, наклоненных под углами $\beta = 20°$ и γ к вертикали ($\operatorname{tg}\gamma = 2\operatorname{tg}\beta$). Масса лестницы $m = 20$ кг. Определите, с какой силой взаимодействуют между собой части лестницы. Трения в шарнире нет. Коэффициент трения μ между полом и касающимися его частями стремянки одинаков. При каком минимальном значении коэффициента μ части лестницы не будут разъезжаться? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

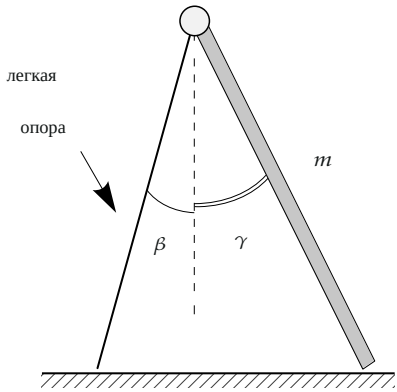

Рис. 2

▲ **Решение. Что происходит.** Стремянка стоит в равновесии: для неё целиком и для каждой части сумма сил и сумма моментов равны нулю. Ключ — лёгкая опора: на невесомый стержень действуют силы только в двух точках (шарнир и пол), поэтому сила шарнира направлена строго вдоль опоры. Реакции пола найдём из правила моментов для всей лестницы, а силу взаимодействия — из равновесия лёгкой опоры. Класс задачи — «статика: двухсиловой (невесомый) стержень».

Обозначения. H — высота шарнира; N_1, N_2 — силы нормальной реакции пола на лёгкую опору и на массивную часть; $F_{тр1}$, $F_{тр2}$ — силы трения покоя; $\vec{F}$ — сила, с которой массивная часть действует на лёгкую опору (по третьему закону Ньютона на массивную часть действует $-\vec{F}$); оси x вправо, y вверх.

1. Геометрия. Нижний конец лёгкой опоры отстоит от вертикали шарнира на $H\operatorname{tg}\beta$, массивной части — на $H\operatorname{tg}\gamma = 2H\operatorname{tg}\beta$. Центр масс однородной массивной части — её середина, по горизонтали он в $H\operatorname{tg}\beta$ от шарнира, т. е. ровно посередине между вертикалью шарнира и её нижним концом O (рис. 3).

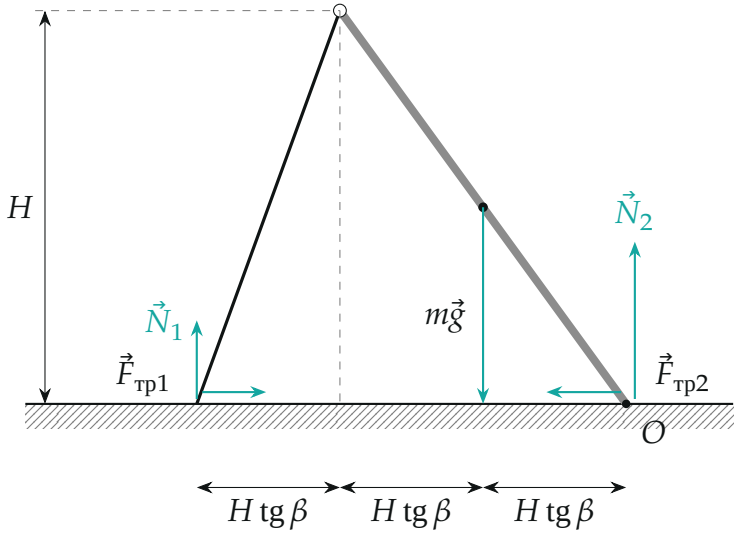

Рис. 3. Внешние силы, действующие на всю лестницу; основание разбито на три равные части $H\operatorname{tg}\beta$.

2. Правило моментов для всей лестницы относительно точки O. Выбираем O, чтобы не входили неизвестные N_2 и $F_{тр2}$; силы трения лежат на полу и плеча относительно O не имеют. Сила шарнира — внутренняя, в уравнение не входит. Плечо N_1 равно $3H\operatorname{tg}\beta$, плечо mg — $H\operatorname{tg}\beta$:

$$N_1 \cdot 3H\operatorname{tg}\beta = mg \cdot H\operatorname{tg}\beta \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{mg}{3}.$$

Второй закон Ньютона для всей лестницы в проекции на y: $N_1 + N_2 = mg$, откуда $N_2 = \frac{2}{3}mg$.

3. Направление силы шарнира. Запишем правило моментов для лёгкой опоры относительно её нижнего конца. Сил там три: $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр1}$ приложены в этой точке и моментов не дают, а сила тяжести опоры равна нулю. Значит, и момент $\vec{F}$ относительно нижнего конца равен нулю: линия действия $\vec{F}$ проходит через нижний конец, т. е. $\vec{F}$ направлена вдоль опоры (рис. 4). Опора сжата: массивная часть давит на неё вниз-влево.

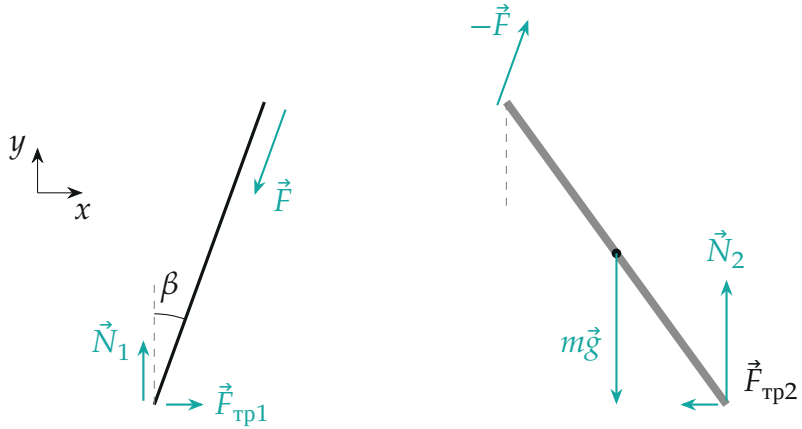

Рис. 4. Силы, действующие на лёгкую опору (слева) и на массивную часть (справа).

4. Сила взаимодействия. Второй закон Ньютона для лёгкой опоры в проекции на y: $N_1 - F\cos\beta = 0$,

$$F = \frac{N_1}{\cos\beta} = \frac{mg}{3\cos\beta} = \frac{200}{3 \cdot 0{,}940}\ \text{Н} \approx 71\ \text{Н}.$$

5. Силы трения. Проекция на x для лёгкой опоры: $F_{тр1} - F\sin\beta = 0$, т. е.

$$F_{тр1} = F\sin\beta = N_1\,\text{tg}\,\beta = \frac{mg}{3}\,\text{tg}\,\beta.$$

Проекция на x для всей лестницы: $F_{тр1} - F_{тр2} = 0$ — силы трения равны по модулю и направлены внутрь, навстречу разъезжанию.

6. Условие «не разъезжаются». Сила трения покоя не больше μN для каждой ножки:

$$\mu \geq \frac{F_{\text{тр}1}}{N_1} = \operatorname{tg}\beta, \qquad \mu \geq \frac{F_{\text{тр}2}}{N_2} = \frac{N_1 \operatorname{tg}\beta}{2N_1} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{2}.$$

Сильнее ограничение для лёгкой опоры — она прижата к полу вдвое слабее, а сила трения нужна такая же. Поэтому

$$\mu_{\min} = \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}20^\circ \approx 0{,}36.$$

Обратите внимание: у лёгкой опоры нельзя рисовать силу шарнира «как удобно» (например, горизонтально или вертикально): без собственного веса только сила вдоль стержня не создаёт момента относительно нижнего конца.

Проверка. Размерность: $[mg] = \text{Н}$. Второй способ для массивной части: правило моментов относительно шарнира — $N_2 \cdot 2H\operatorname{tg}\beta = mg \cdot H\operatorname{tg}\beta + F_{\text{тр}2} \cdot H$, т. е. $\frac{4}{3}mgH\operatorname{tg}\beta = mgH\operatorname{tg}\beta + \frac{1}{3}mgH\operatorname{tg}\beta$ — верно. Предел: при $\beta \to 0$ опора вертикальна, трение не нужно ($\mu_{\min} \to 0$), а $F \to \frac{mg}{3}$ — ровно N_1.

Ответ. $F = \dfrac{mg}{3\cos\beta} \approx 71$ Н; $\mu_{\min} = \operatorname{tg}\beta \approx 0{,}36$.