Четырёхцилиндровый нагрев

Задача 4. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 4] «Четырёхцилиндровый нагрев».

В цилиндрический стакан калориметра налито $m_0 = 200$ г жидкости плотностью ρ_0 при температуре $t_0 = 0°\text{C}$. В термостате при неизвестной температуре T находится набор однородных цилиндров из одного и того же металла плотностью $\rho = 6\rho_0$. Диаметр всех цилиндров одинаков и практически совпадает (чуть меньше) с диаметром стакана. При погружении в калориметр цилиндра массы m тепловое равновесие устанавливается при температуре $t_1 = 10°\text{C}$. Если вместо первого цилиндра в калориметр был бы погружен цилиндр массой $1{,}6m$, то установилась бы температура $t_2 = 15°\text{C}$. При погружении цилиндра массы $3m$ установилась бы температура $t_3 = 30°\text{C}$, а для цилиндра массы $4m$ — температура $t_4 = 45°\text{C}$. Ось цилиндров при погружении вертикальна. Определите:

1. температуру T цилиндров;
2. долю γ объёма стакана калориметра, заполненного жидкостью;
3. массу m первого цилиндра;
4. отношение удельных теплоёмкостей c_0/c жидкости и металла.

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на уравнение теплового баланса с подвохом: стакан заполнен не доверху, и тяжёлый цилиндр ($\rho = 6\rho_0$ — тонет) вытесняет жидкость вверх. Пока объём цилиндра меньше пустой части стакана, вся жидкость остаётся и греется; у большого цилиндра часть жидкости выливается через край, и греть приходится меньше жидкости. Поэтому четыре опыта описываются не одной формулой, а двумя. Чтобы увидеть, какой опыт к какой формуле относится, выпрямим зависимость: построим $1/t$ от m/M — обе формулы дадут прямые.

Обозначения. M — масса цилиндра в опыте, t — установившаяся температура; V — объём стакана, $\Delta V = (1-\gamma)V$ — его пустая часть, $\Delta m = \rho_0 \Delta V$ — масса жидкости, которая поместилась бы в пустую часть; $V_\text{ц} = M/\rho$ — объём цилиндра; $m_\text{ж}$ — масса жидкости, оставшейся в стакане.

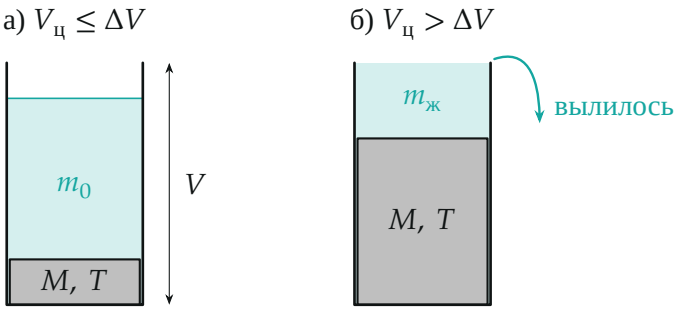

Рис. 1. Поясняющий рисунок. а) Цилиндр помещается в пустую часть стакана: вся жидкость m_0 остаётся и стоит над цилиндром. б) Цилиндр больше пустой части: стакан полон до края, лишняя жидкость вылилась, осталась $m_ж < m_0$.

1. Тепловой баланс без вытекания. Цилиндр остывает от T до t, жидкость нагревается от $0°C$ до t; теплообменом со стаканом и окружением пренебрегаем (калориметр). Уравнение теплового баланса:

$$cM(T-t) = c_0 m_0\,(t-0) \quad \Rightarrow \quad cMT = t\,(cM + c_0 m_0).$$

Делим на $cMTt$ и выписываем $1/t$ как функцию $x = m/M$:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{T} + \frac{c_0 m_0}{c\,T\,m}\cdot\frac{m}{M},$$

— прямая с наклоном $k_1 = \dfrac{c_0 m_0}{cTm}$, отсекающая на оси $1/t$ отрезок $1/T$.

2. Тепловой баланс с вытеканием. Если $V_ц > \Delta V$, стакан наполнен до края (рис. 1, б): жидкость занимает объём $V - V_ц$, и её масса

$$m_ж = \rho_0(V - V_ц) = m_0 + \Delta m - \frac{\rho_0}{\rho}M = m_0 + \Delta m - \frac{M}{6}.$$

Вылившаяся жидкость ушла в начале, холодной, и в теплообмене не участвует. Баланс $cM(T-t) = c_0 m_ж t$ даёт

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{c_0}{6c}\right) + \frac{c_0(m_0+\Delta m)}{c\,T\,m}\cdot\frac{m}{M},$$

— тоже прямая, но с бо́льшим наклоном $k_2 = \dfrac{c_0(m_0 + \Delta m)}{cTm}$ и другим отрезком на оси.

3. Точки опытов на графике. Переводим данные в координаты $x = m/M$, $y = 1/t$:

опыт	1	2	3	4
M	m	$1{,}6m$	$3m$	$4m$
$x = m/M$	1	0,625	0,333	0,25
$y = 1/t$, °C^{-1}	0,100	0,0667	0,0333	0,0222

Наклон по точкам 1–2: $\dfrac{0{,}100 - 0{,}0667}{1 - 0{,}625} = 0{,}0889$; по точкам 3–4: $\dfrac{0{,}0333 - 0{,}0222}{0{,}333 - 0{,}25} = 0{,}1333$. Четыре точки на одну прямую не ложатся — это две прямые (рис. 2). У лёгких цилиндров (большие x) жидкость не вытекает — точки 1 и 2 на прямой из шага 1; у тяжёлых — точки 3 и 4 на прямой из шага 2.

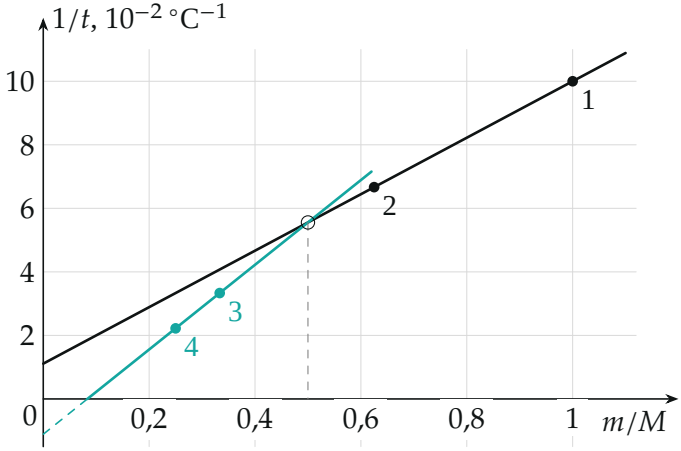

Рис. 2. Опыты в координатах m/M, $1/t$. Чёрная прямая через точки 1, 2 — жидкость не вытекает; бирюзовая через 3, 4 — вытекает (пунктир — её продолжение до оси). Прямые пересекаются при $m/M = 0{,}5$ (кружок) — там цилиндр ровно заполняет пустую часть стакана.

Пункт 1. Температура T. Прямая без вытекания проходит через точки 1 и 2; её отрезок на оси $1/t$:

$$\frac{1}{T} = y_1 - k_1 x_1 = 0{,}100 - 0{,}0889 \cdot 1 = 0{,}0111\ ^\circ\text{C}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = 90^\circ\text{C}.$$

Без графика: из $\frac{1}{t_1} = \frac{1}{T} + k_1$ и $\frac{1}{t_2} = \frac{1}{T} + \frac{k_1}{1{,}6}$ исключаем k_1: $\frac{1}{T} = \frac{1{,}6/t_2 - 1/t_1}{0{,}6} = \frac{1{,}6/15 - 1/10}{0{,}6} = \frac{1}{90}$.

Пункт 2. Доля γ. Отношение наклонов двух прямых:

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{m_0 + \Delta m}{m_0} = \frac{0{,}1333}{0{,}0889} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{m_0}{2}.$$

Жидкость занимает m_0/ρ_0, пустая часть — $\Delta m/\rho_0$, поэтому

$$\gamma = \frac{m_0}{m_0 + \Delta m} = \frac{1}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}.$$

Пункт 4. Отношение c_0/c. Отрезок прямой с вытеканием на оси $1/t$ равен $y_3 - k_2 x_3 = 0{,}0333 - 0{,}1333 \cdot 0{,}333 = -0{,}0111 = -\frac{1}{90}$ (рис. 2). По шагу 2 он равен $\frac{1}{T}\left(1 - \frac{c_0}{6c}\right)$:

$$\frac{1}{90}\left(1 - \frac{c_0}{6c}\right) = -\frac{1}{90} \quad \Rightarrow \quad \frac{c_0}{6c} = 2, \qquad \frac{c_0}{c} = 12.$$

Отрезок отрицательный: при очень тяжёлом цилиндре жидкости остаётся мало, и формула шага 2 теряет смысл ещё до $x = 0$ — физический участок прямой только $x \le 0{,}5$.

Пункт 3. Масса m. Из наклона первой прямой $k_1 = \frac{c_0 m_0}{cTm}$:

$$m = \frac{c_0}{c} \cdot \frac{m_0}{Tk_1} = 12 \cdot \frac{200\ \text{г}}{90 \cdot 0{,}0889} = 300\ \text{г}.$$

Второй способ — по излому. Прямые пересекаются при $x = 0{,}5$, то есть при $M = 2m$: такой цилиндр ровно заполняет пустую часть, $\frac{2m}{6\rho_0} = \Delta V = \frac{\Delta m}{\rho_0} = \frac{m_0}{2\rho_0}$, откуда $m = \frac{3}{2}m_0 = 300$ г — то же.

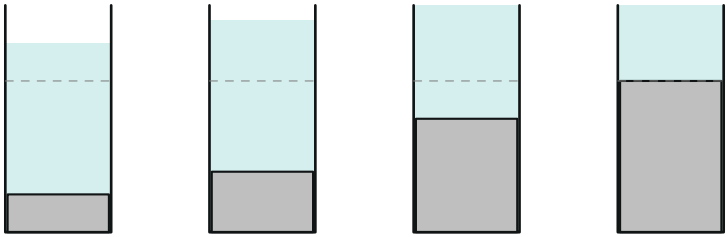

Рис. 3. Четыре опыта в масштабе ($m = 300$ г, $\gamma = 2/3$; пунктир — начальный уровень). Цилиндры m и $1{,}6m$ занимают $1/6$ и $0{,}27$ стакана — меньше пустой трети; цилиндры $3m$ и $4m$ — половину и $2/3$ стакана, жидкость вытекает.

Обратите внимание: вылившаяся жидкость в теплообмене не участвует — она ушла через край в первый момент, ещё холодной. Поэтому в балансе стоит только оставшаяся масса $m_ж$.

Проверка. Подставим $T = 90°\text{C}$, $c_0/c = 12$, $m = 300$ г, $\Delta m = 100$ г во все четыре опыта. Опыт 1: $300 \cdot 80 = 12 \cdot 200 \cdot 10$, $24\,000 = 24\,000$. Опыт 2: $480 \cdot 75 = 12 \cdot 200 \cdot 15$, $36\,000 = 36\,000$. Опыт 3: $m_ж = 300 - 150 = 150$ г, $900 \cdot 60 = 12 \cdot 150 \cdot 30$, $54\,000 = 54\,000$. Опыт 4: $m_ж = 300 - 200 = 100$ г, $1200 \cdot 45 = 12 \cdot 100 \cdot 45$, $54\,000 = 54\,000$. Отбор по вытеканию согласован: объёмы цилиндров 50, 80, 150, 200 при пустой части 100 (в единицах $г/\rho_0$). Размерность: $k_1 = \frac{c_0 m_0}{cTm}$ — в $°\text{C}^{-1}$, как и $1/t$.

Тяжёлый цилиндр греет сильнее не только потому, что несёт больше тепла, но и потому, что вытесняет часть холодной жидкости.

Ответ. 1) $T = 90°\text{C}$; 2) $\gamma = \dfrac{2}{3}$; 3) $m = \dfrac{3}{2} m_0 = 300$ г; 4) $\dfrac{c_0}{c} = 12$.