Треугольная призма

Задача 5. [ВсОШ 2018/19, заключительный этап, 9 класс, задача 5] «Треугольная призма».

Электрическая цепь, представляющая собой треугольную призму с диагоналями в боковых гранях (рис. 3), состоит из проводников с одинаковым сопротивлением $R = 12$ Ом независимо от их длины. Определите сопротивление цепи между узлами: 1) A и A_1; 2) C и A_1.

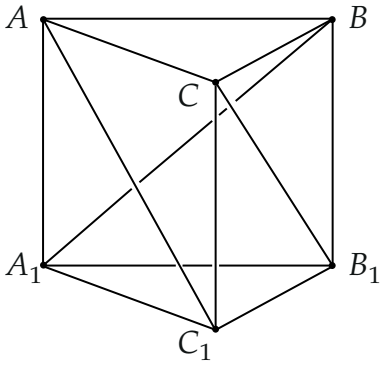

Рис. 3

▲ **Решение. Что происходит.** Задача на сопротивление «объёмной» цепи из одинаковых резисторов — класс задач на симметрию. Двенадцать резисторов не складываются последовательно-параллельно напрямую. Ключ — найти узлы с одинаковым потенциалом: их можно соединить проводом или, если между ними есть резистор, выбросить его (ток по нему не идёт), и цепь станет простой.

Обозначения. φ_X — потенциал узла X; источник подключён так, что φ входного узла равен U, выходного — 0. Двенадцать проводников: рёбра оснований AB, BC, CA, A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1; боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1; диагонали AC_1, A_1B, CB_1.

Пункт 1. Сопротивление между A и A_1.

1. Соседи узлов. Выпишем, с кем соединён каждый узел (по одному проводнику R):

$$A:\ B,\ C,\ A_1,\ C_1; \quad A_1:\ B_1,\ C_1,\ A,\ B;$$
$$B:\ A,\ C,\ B_1,\ A_1; \quad C_1:\ A_1,\ B_1,\ C,\ A;$$
$$C:\ A,\ B,\ C_1,\ B_1; \quad B_1:\ A_1,\ C_1,\ B,\ C.$$

Узлы B и C_1 соединены с одними и теми же узлами A, A_1, C, B_1, а друг с другом — нет. Значит, они в цепи равноправны, и $\varphi_B = \varphi_{C_1}$.

2. Чему равен этот потенциал. Переименование $A \leftrightarrow A_1$, $C \leftrightarrow B_1$, $B \leftrightarrow C_1$ переводит каждый проводник в проводник (например, $AB \to A_1C_1$, $CB_1 \to B_1C$, $AA_1 \to A_1A$), а входной узел — в выходной. Если поменять местами полюса источника, потенциалы станут $U - \varphi$, а картина токов отразится этим переименованием. Поэтому $\varphi_B = U - \varphi_{C_1}$, и с шагом 1

$$\varphi_B = \varphi_{C_1} = \frac{U}{2}, \qquad \varphi_C + \varphi_{B_1} = U.$$

Соединим B и C_1 в один узел X: ток в цепи от этого не изменится. Пары проводников AB и AC_1, A_1B и A_1C_1, CB и CC_1, B_1B и B_1C_1 становятся параллельными, каждая — $R/2$ (рис. 4).

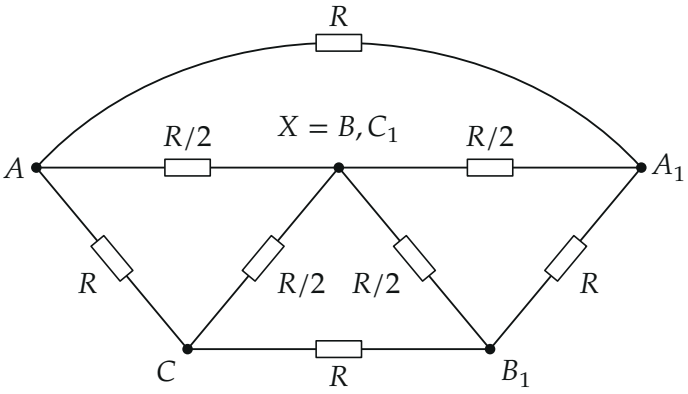

Рис. 4. Цепь после соединения узлов B и C_1 (равный потенциал $U/2$) в узел X. Сдвоенные проводники заменены одним сопротивлением $R/2$.

3. Расщепляем узел X. В нижней части рис. 4 узел X — середина симметричного моста C–X–B_1: по шагу 2 $\varphi_X = \frac{U}{2} = \frac{\varphi_C + \varphi_{B_1}}{2}$. Отсоединим от X провода к C и B_1 и сомкнём их в отдельной точке X': по симметрии ($R/2$ и $R/2$) её потенциал тоже $\frac{\varphi_C + \varphi_{B_1}}{2} = \frac{U}{2}$, то есть токи не меняются. Получилась цепь из трёх параллельных ветвей (рис. 5):

- проводник AA_1: R;
- ветвь A–X–A_1: $\frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$;

- ветвь A–C–B_1–A_1, где между C и B_1 параллельно стоят R и $\frac{R}{2}$ + $\frac{R}{2} = R$, то есть $\frac{R}{2}$: всего $R + \frac{R}{2} + R = \frac{5R}{2}$.

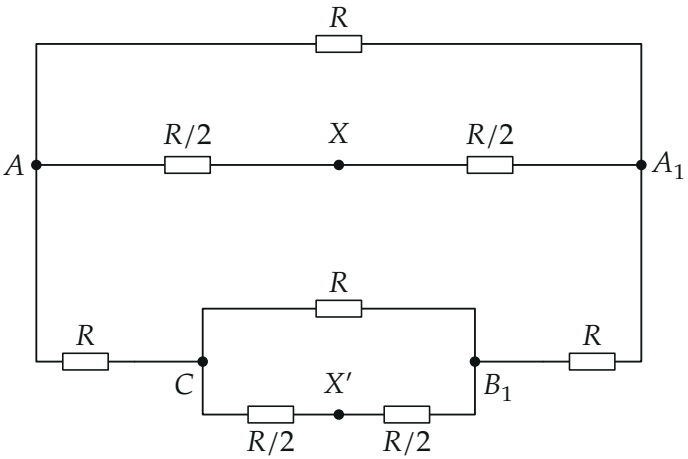

Рис. 5. Узел X расщеплён на X и X' (оба с потенциалом $U/2$): цепь стала последовательно-параллельной.

4. Складываем. Проводимости параллельных ветвей складываются:

$$\frac{1}{R_{AA_1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{5R/2} = \frac{2}{R} + \frac{2}{5R} = \frac{12}{5R} \quad \Rightarrow \quad R_{AA_1} = \frac{5}{12}R = 5 \text{ Ом}.$$

Пункт 2. Сопротивление между C и A_1.

5. Четыре равноправных узла. По таблице соседей из шага 1 каждый из узлов A, B, B_1, C_1 соединён одним проводником с C и одним — с A_1; оставшиеся проводники связывают эти четыре узла в кольцо A–B–B_1–C_1–A. Все четыре узла в цепи одинаковы, значит, их потенциалы равны. Тогда по проводникам кольца AB, BB_1, B_1C_1, C_1A ток не идёт — это сбалансированный мост, и кольцо можно убрать (рис. 6).

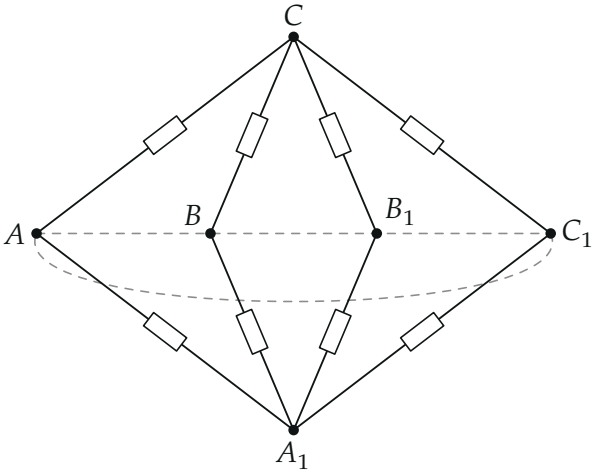

Рис. 6. Подключение к C и A_1: все сплошные проводники — R. Четыре средних узла имеют одинаковый потенциал $U/2$, по проводникам кольца (пунктир) ток не идёт.

6. Складываем. Остались четыре одинаковые ветви C–узел–A_1 по $2R$, соединённые параллельно:

$$R_{CA_1} = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2} = 6\ \text{Ом}.$$

Обратите внимание: в пункте 1 узлы B и C_1 проводником не соединены, поэтому их *соединяем*; в пункте 2 кольцо между равнопотенциальными узлами есть, и его *выбрасываем*. Оба приёма законны только для узлов с равным потенциалом.

Проверка. Пункт 1 — прямым расчётом по законам Кирхгофа (python, $U = 1$): $\varphi_C = 0{,}6$, $\varphi_B = \varphi_{C_1} = 0{,}5$, $\varphi_{B_1} = 0{,}4$, ток из A: $\frac{1}{R} + \frac{2\cdot 0{,}5}{R} + \frac{0{,}4}{R} = \frac{2{,}4}{R}$ — то есть $R_{AA_1} = \frac{R}{2{,}4} = \frac{5}{12}R$. Предел: ответ меньше R (проводник AA_1 сам по себе) и больше $R/3$ — согласуется. Пункт 2: ток из C четырьмя проводниками по $\frac{U/2}{R}$ даёт $\frac{2U}{R}$, $R_{CA_1} = \frac{R}{2}$.

У C четыре равноценных пути к A_1 по два проводника, а у A — прямой проводник и ещё два пути: поэтому $R_{AA_1} = \frac{5}{12}R$ меньше $R_{CA_1} = \frac{1}{2}R$.

Ответ. 1) $R_{AA_1} = \dfrac{5}{12}R = 5$ Ом; 2) $R_{CA_1} = \dfrac{1}{2}R = 6$ Ом.