Сосчитай шарики

Задача 10.2. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.2] «Сосчитай шарики».

В прямоугольной запечатанной непрозрачной коробочке находится некоторое количество шариков. Определите их количество.

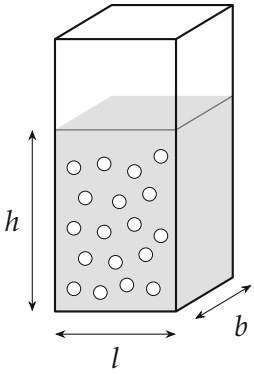
Толщиной стенок непрозрачной коробочки и её массой можно пренебречь. Считайте, что все шарики одинаковые как внутри прозрачной, так и внутри непрозрачной коробочек. Прозрачная коробочка выдана вам для качественного понимания процессов, происходящих внутри непрозрачной коробочки; её нельзя использовать в качестве оборудования, но вы можете ссылаться на качественные результаты экспериментов с прозрачной коробочкой. Также вы можете извлекать из прозрачной коробочки шарики и проводить с ними необходимые опыты.

ВАЖНО! Вскрывать непрозрачную коробочку и получать доступ к её содержимому запрещается! Также предложенный вами метод должен работать и для коробочек с жёсткими стенками, иначе он будет оценён в 0 баллов.

При написании отчёта уделите особое внимание описанию ваших действий, особенно тех, которые направлены на увеличение точности измерений, и пояснениям, как именно эти действия позволяют увеличить точность измерений.

Примечание. Объём шара равен $V_{\text{ш}} = \dfrac{\pi}{6} D^3$, где D — диаметр шара.

Оборудование: непрозрачная коробочка, две линейки, канцелярская скрепка, прозрачная коробочка, лист миллиметровки формата А5.



Поясняющий рисунок: коробочка (здесь прозрачная) с шариками — пшеном; после постукивания по бокам шарики занимают прямоугольный параллелепипед $l \times b \times h$.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это экспериментальная задача-оценка: число шариков $N = V/V_1$, где V — объём, занятый шариками, а V_1 — объём, который приходится на один шарик вместе с пустотами. Внутрь заглянуть нельзя, но уровень h шариков можно «взвесить» через опрокидывание: пустая коробочка ничего не весит, центр масс содержимого — посередине слоя шариков, на высоте $h/2$. Коробочку ставят на наклонную линейку и находят угол, при котором она начинает опрокидываться, — он задаёт положение центра масс. Объём, приходящийся на шарик, — через его диаметр и плотность упаковки.

Обозначения. l, b — ширина и глубина коробочки; h — высота слоя шариков; $h_{\text{цм}} = h/2$ — высота центра масс; α_1 — угол наклона линейки, при котором коробочка начинает опрокидываться; D — диаметр шарика; k — плотность упаковки (доля объёма, занятая шариками).

1. Что показывает прозрачная коробочка. Шарики сыпучие: при наклоне до некоторого угла они держат форму, а за ним лавиной пересыпаются. Если коробочку поставить вертикально и постучать по боковым стенкам, поверхность шариков становится горизонтальной и слой — прямоугольным параллелепипедом; стук сверху вниз так не выравнивает. Поэтому перед каждым опытом ставим коробочку вертикально и стучим по бокам.

2. Опыт с наклоном. Ставим непрозрачную коробочку на линейку

гранью $l \times b$ и медленно поднимаем один конец линейки. Сама по себе коробочка соскальзывает раньше, чем опрокидывается, — трения мало. Поэтому на линейку надеваем скрепку: она образует тонкий упор у нижнего края коробочки. Упор низкий, его сила приложена в самом углу коробочки, поэтому моменты относительно этого угла он не меняет, но не даёт скользить (рис. 2). Опрокидывание начинается раньше, чем пересыпаются шарики: это слышно (пересыпание шуршит) и видно на прозрачной коробочке, наклонённой на тот же угол. Значит, в момент опрокидывания слой шариков — ещё прямоугольный параллелепипед.

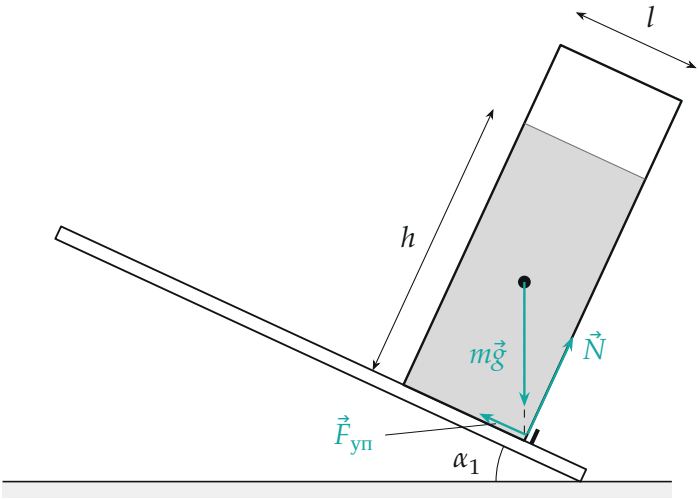


Рис. 2. Коробочка на наклонной линейке в момент начала опрокидывания (построено для $\operatorname{ctg}\alpha_1 = 2{,}16$*): центр масс шариков — ровно над нижним углом, упором из скрепки. Сила упора направлена вдоль линейки вверх по склону.*

3. Условие опрокидывания. Силы на коробочку: тяжесть $m\vec{g}$ в центре масс, сила реакции линейки $\vec{N}$ и сила упора $\vec{F}_{\text{уп}}$ — обе в нижнем углу. В момент, когда коробочка начинает поворачиваться вокруг нижнего угла, правило моментов относительно этого угла: момент тяжести равен нулю, то есть вертикаль через центр масс проходит через угол (рис. 3). В системе коробочки центр масс отстоит от угла на $l/2$ вдоль дна и на $h_{\text{цм}}$ поперёк. Угол между этим отрезком и нормалью к линейке

равен α_1, поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{l/2}{h_{\text{цм}}} \;\Rightarrow\; h_{\text{цм}} = \frac{l}{2}\operatorname{ctg}\alpha_1, \qquad h = 2h_{\text{цм}} = l\operatorname{ctg}\alpha_1.$$

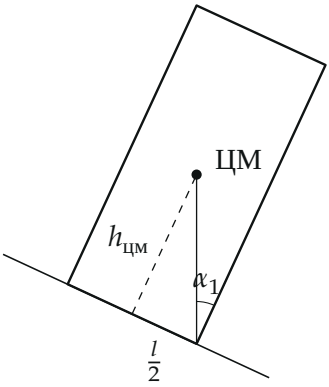


Рис. 3. Геометрия опрокидывания: вертикаль через центр масс (ЦМ) проходит через нижний угол; пунктир от угла — нормаль к линейке. Катеты $l/2$ (вдоль дна) и $h_{цм}$ (поперёк), угол между вертикалью и нормалью — α_1.

4. Измерения угла. $\sin\alpha_1 = H/L$, где H — высота поднятого конца линейки над столом, L — длина линейки от точки опоры на столе до этого конца. Угол увеличиваем плавно и медленно (рывок опрокинет раньше времени), опыт повторяем трижды, каждый раз заново выравнивая слой постукиванием:

опыт	H, см	$\sin\alpha_1$	$\operatorname{ctg}\alpha_1$
1	11,1	0,430	2,10
2	10,6	0,411	2,22
3	10,8	0,419	2,17

(синусы у организаторов соответствуют рабочей длине $L \approx 25{,}8$ см, а не полной длине 25 см линейки; берём их значения). Среднее $\operatorname{ctg}\alpha_1 = 2{,}16$, разброс $\Delta\operatorname{ctg}\alpha_1 = 0{,}04$. Размеры коробочки: $l = 47$ мм, $b = 39$ мм.

Высота слоя и объём шариков:

$$h = l \operatorname{ctg} \alpha_1 = 4{,}7 \cdot 2{,}16 \text{ см} = 10{,}2 \text{ см},$$

$$V = lbh = 4{,}7 \cdot 3{,}9 \cdot 10{,}2 \text{ см}^3 \approx 186 \text{ см}^3.$$

5. Диаметр шарика. Один шарик линейкой не измерить точно. Сгибаем миллиметровку, в сгиб насыпаем шарики — они встают в ряд вплотную (рис. 4). Длина ряда из $N = 50$ шариков $L_\text{р} = 10{,}9$ см, $D = L_\text{р}/N = 2{,}18$ мм. Погрешность длины ряда ~ 2 мм делится на 50: $\Delta D = 0{,}04$ мм — в этом и смысл ряда.

$$V_\text{ш} = \frac{\pi}{6} D^3 = 0{,}524 \cdot 2{,}18^3 \text{ мм}^3 = 5{,}4 \text{ мм}^3.$$

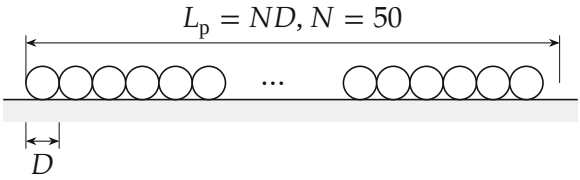


Рис. 4. Шарики в сгибе миллиметровки — ряд вплотную; длина ряда делится на число шариков.

6. Плотность упаковки. Шарики не заполняют объём целиком. Для правильных упаковок $k = NV_\text{ш}/a^3$ (N шариков на кубическую ячейку со стороной a, рис. 5):

- простая кубическая: $a = D$, один шарик на ячейку, $k = \pi/6 = 0{,}52$;
- объёмно-центрированная: шарики касаются вдоль диагонали куба, $a\sqrt{3} = 2D$, два на ячейку, $k = \pi\sqrt{3}/8 = 0{,}68$;
- гранецентрированная (самая плотная): касаются вдоль диагонали грани, $a\sqrt{2} = 2D$, четыре на ячейку, $k = \pi\sqrt{2}/6 = 0{,}74$.

Насыпанные шарики лежат беспорядочно, между крайними случаями. Опыт с шариками из прозрачной коробочки: насыпать их в мерный объём и залить водой — вода заполнит пустоты, и доля пустот видна сразу; так получено $k = 0{,}62$. Берём $k = 0{,}6 \pm 0{,}1$.

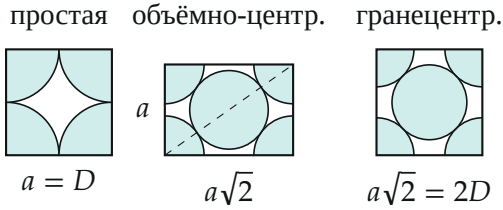


Рис. 5. Сечения ячеек трёх упаковок: грань простой кубической; диагональное сечение объёмно-центрированной (шарики касаются вдоль пунктирной диагонали куба, $a\sqrt{3} = 2D$); грань гранецентрированной (касаются вдоль диагонали грани).

7. Число шариков. На один шарик вместе с пустотами приходится $V_1 = V_ш/k = 5{,}4/0{,}6$ мм^3 $= 9{,}0$ мм^3:

$$N_ш = \frac{V}{V_1} = \frac{kV}{V_ш} = \frac{0{,}6 \cdot 1{,}86 \cdot 10^5 \text{ мм}^3}{5{,}42 \text{ мм}^3} \approx 2{,}1 \cdot 10^4.$$

8. Погрешность.

$$\varepsilon_N = 3\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta \operatorname{ctg}\alpha_1}{\operatorname{ctg}\alpha_1} =$$

$$= 0{,}055 + 0{,}17 + 0{,}02 + 0{,}03 + 0{,}02 \approx 0{,}3,$$

главный вклад — плотность упаковки. $N_ш = (2{,}1 \pm 0{,}6) \cdot 10^4$.

Обратите внимание. Объём шарика диаметром 2,18 мм — 5,4 мм^3, а не 0,54: у организаторов здесь ошибка в порядке, из-за неё их ответ $(2{,}0 \pm 0{,}5) \cdot 10^5$ в 10 раз больше верного. Самопроверка: в 186 см^3 пшена около 150 г, а в грамме пшена порядка 150 зёрен — $\sim 2 \cdot 10^4$.

Соберём ответ.

$$N_ш = \frac{k\,lb \cdot l \operatorname{ctg}\alpha_1}{\pi D^3/6} \approx (2{,}1 \pm 0{,}6) \cdot 10^4.$$

Проверка. Размерность: мм^3/мм^3 — безразмерно. Предел: если бы коробочка была заполнена доверху (больше h), опрокидывание шло бы при меньшем угле — $\operatorname{ctg}\alpha_1$ растёт с h, верно. Второй способ оценки:

шарик с пустотами — кубик со стороной $V_1^{1/3} = 2{,}08$ мм; в слое 47×39 мм их $22{,}6 \cdot 18{,}8 \approx 425$, слоёв $102/2{,}08 \approx 49$, всего $\approx 2{,}1 \cdot 10^4$ — то же.

Опрокидывание «взвешивает» положение центра масс, а центр масс однородного слоя — его середина: так угол наклона сообщает уровень шариков в закрытой коробочке.

Ответ. $N_{\text{ш}} = \dfrac{k\,l^2 b \operatorname{ctg}\alpha_1}{\pi D^3/6} \approx (2{,}1 \pm 0{,}6) \cdot 10^4$ (при $l = 47$ мм, $b = 39$ мм, $\operatorname{ctg}\alpha_1 = 2{,}16$, $D = 2{,}18$ мм, $k = 0{,}6$).