Шарик на нити

Задача 10.1. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.1] «Шарик на нити».

Находящийся на гладкой горизонтальной поверхности шарик привязан нитью к тонкой неподвижной оси. Его толкнули вдоль поверхности, и он стал двигаться по окружности. При этом сила сопротивления воздуха, действующая на шарик, направлена против его скорости и пропорциональна ей. Ускорение шарика в некоторый момент направлено под углом α к нити (рис. 1). На какой угол φ повернётся нить с этого момента времени до остановки шарика?

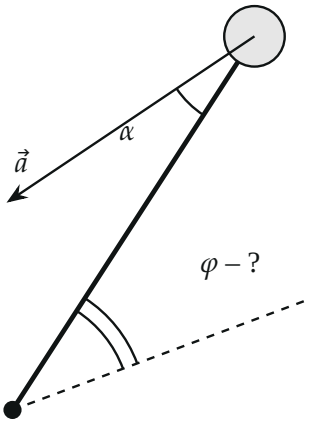

Рис. 1. Рисунок условия (вид сверху).

▲ **Решение. Что происходит.** В горизонтальной плоскости на шарик действуют две силы: натяжение нити — к оси, оно поворачивает скорость, и сопротивление воздуха — против скорости, оно уменьшает её модуль. Значит, ускорение раскладывается на центростремительное (вдоль нити) и касательное (вдоль скорости), и угол α задаёт их отношение. Сила сопротивления пропорциональна скорости, поэтому скорость убывает пропорционально пройденному пути — путь до остановки находится сразу. Это задача на второй закон Ньютона в проекциях на касательную и нормаль.

Обозначения. m — масса шарика, R — длина нити (радиус окружности), v — скорость в выбранный момент, $\vec{F}_{\text{с}} = -k\vec{v}$ — сила сопро-

тивления, T — натяжение нити, S — путь от выбранного момента до остановки.

1. Силы. Сила тяжести и реакция гладкой поверхности вертикальны и уравновешивают друг друга. В плоскости движения остаются натяжение $\vec{T}$ (к оси) и сопротивление $\vec{F}_\text{с}$ (против скорости) — они перпендикулярны (рис. 2).

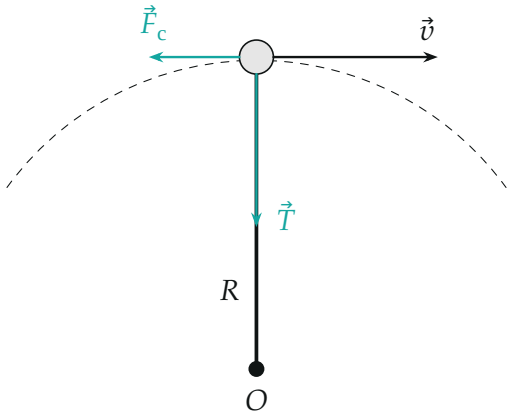

Рис. 2. Силы на шарик в плоскости движения (вид сверху): натяжение $\vec{T}$ к оси O и сопротивление $\vec{F}_c$ против скорости; пунктир — окружность.

2. Ускорение и угол α. Второй закон Ньютона в проекции на нормаль (вдоль нити к центру) и на касательную (против скорости):

$$ma_n = T = \frac{mv^2}{R}, \qquad ma_\tau = F_\text{с} = kv.$$

Нормальная составляющая ускорения направлена вдоль нити, касательная — перпендикулярно ей, поэтому угол ускорения с нитью (рис. 3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{kv/m}{v^2/R} = \frac{kR}{mv}.$$

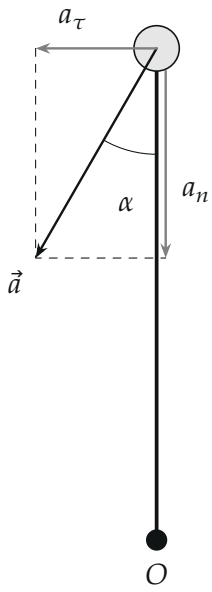

Рис. 3. Ускорение $\vec{a}$ — сумма касательного a_τ (против скорости) и центростремительного a_n (вдоль нити); $\operatorname{tg}\alpha = a_\tau/a_n$. Длины — для $\alpha = 30°$.

3. Путь до остановки. Второй закон Ньютона в проекции на касательную за малое время Δt, за которое шарик проходит путь $\Delta s = v\,\Delta t$:

$$m\,\Delta v = -kv\,\Delta t = -k\,\Delta s.$$

Изменение скорости пропорционально пройденному пути с одним и тем же коэффициентом k/m (рис. 4). Сложим по всем малым участкам от выбранного момента (скорость v) до остановки (скорость 0):

$$m\,(0 - v) = -kS \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mv}{k}.$$

Натяжение нити на это не влияет: оно перпендикулярно скорости и модуль скорости не меняет. Нить остаётся натянутой до конца — $T = mv^2/R > 0$, пока шарик движется.

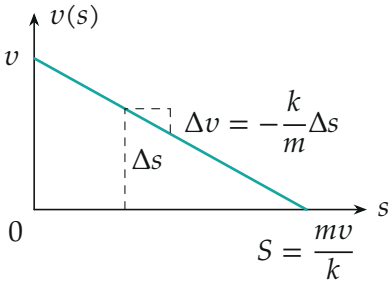

Рис. 4. Скорость линейно убывает с пройденным путём: на каждом отрезке Δs она теряет $\frac{k}{m}\Delta s$.

4. Угол поворота. Шарик идёт по окружности радиуса R, путь S соответствует повороту нити на угол $\varphi = S/R$ (в радианах):

$$\varphi = \frac{mv}{kR} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Например, при $\alpha = 30°$ нить повернётся на $\varphi = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ рад $\approx 99°$ (рис. 5).

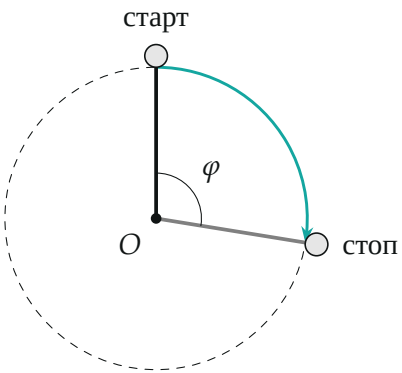

Рис. 5. Поворот нити до остановки для $\alpha = 30°$: $\varphi = \operatorname{ctg} 30° = 1{,}73$ рад.

Обратите внимание. Время до остановки бесконечно — скорость убывает экспоненциально, $v \propto e^{-kt/m}$, — а путь конечен: убывание скорости пропорционально пути, а не времени. Поэтому вопрос «на какой угол повернётся нить» имеет конечный ответ.

Проверка. Размерность: $[mv/(kR)] = \text{кг} \cdot \text{м/с}/(\text{Н} \cdot \text{с/м} \cdot \text{м}) = 1$ — безразмерный угол. Предел: $\alpha \to 0$ — ускорение почти вдоль нити, сопротивление слабое по сравнению с центростремительной силой, и шарик сделает много оборотов: $\operatorname{ctg}\alpha \to \infty$. При $\alpha \to 90^\circ$ сопротивление велико, шарик почти сразу остановится: $\varphi \to 0$.

Ответ. $\varphi = \operatorname{ctg}\alpha$ (в радианах).