Бильярд на льду

Задача 10.2. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.2] «Бильярд на льду».

На горизонтальной шероховатой поверхности покоятся две одинаковые маленькие шайбы. По одной из них наносят удар клюшкой, после чего она налетает на вторую шайбу. На рисунке представлены участки траекторий шайб до и после их частично упругого столкновения.

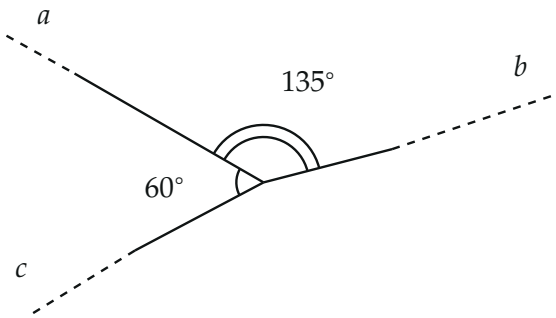

Рис. 1. Рисунок условия: участки траекторий шайб.

1. Определите, какая из трёх траекторий — «a», «b» или «c» — может быть траекторией налетающей шайбы. Ответ обоснуйте.
2. Для каждого из возможных случаев дальнейшего развития событий определите: А) отношение расстояний, которые проходят шайбы до остановки после столкновения; Б) долю кинетической энергии налетающей шайбы, которая переходит в тепло в результате столкновения.

Боковые поверхности шайб гладкие.

▲ **Решение. Что происходит.** Удар короткий: за время удара сила трения о лёд даёт ничтожный импульс, и импульс двух шайб сохраняется. Удар частично упругий — часть энергии уходит в тепло, поэтому кинетическая энергия после удара меньше, чем до. Эти два условия выбирают траекторию налетающей шайбы и задают треугольник импульсов, из которого находятся скорости. Пути до остановки при одинаковом трении пропорциональны квадратам скоростей. Задача на законы сохранения импульса и энергии при ударе.

Обозначения. m — масса шайбы, $\vec{p}_0$ — импульс налетающей шайбы перед ударом, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ — импульсы шайб после удара, θ — угол между $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ (угол разлёта), $E_0 = p_0^2/(2m)$, Q — выделившееся тепло, μ — коэффициент трения о лёд.

Пункт 1.

1. Разлёт под острым углом. Закон сохранения импульса системы двух шайб за время удара: $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$. Возведём в квадрат:

$$p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta.$$

Тепло — разность кинетических энергий до и после ($E = p^2/(2m)$):

$$Q = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m} - \frac{p_2^2}{2m} = \frac{p_1p_2\cos\theta}{m}.$$

Удар частично упругий, $Q > 0$, значит, $\cos\theta > 0$: *шайбы разлетаются под острым углом*, и вектор $\vec{p}_0$ лежит внутри этого угла (он сумма $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$).

2. Выбор траектории. Траектория налетающей шайбы до удара — одна из трёх, две другие — пути после удара. Углы между траекториями по рисунку: a и b — $135°$, a и c — $60°$, значит, b и c — $360° - 135° - 60° = 165°$.

- налетает по a: разлёт по b и c под $165°$ — тупой угол, $Q < 0$, невозможно (рис. 5);
- налетает по c: разлёт по a и b под $135°$ — тупой, невозможно;
- налетает по b: разлёт по a и c под $\theta = 60°$ — острый, и направление движения шайбы по b (к точке удара и дальше) лежит внутри этого угла: от него до a — $180° - 135° = 45°$, до c — $60° - 45° = 15°$ (рис. 2).

Налетающая шайба двигалась по траектории b.

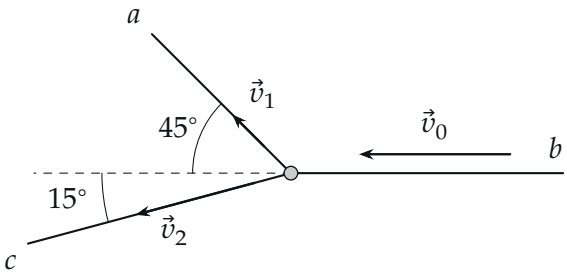

Рис. 2. Налетающая шайба приходит по b; после удара шайбы уходят по a (под 45° к прежнему направлению) и по c (под 15°). Длины стрелок — по найденным скоростям: $v_1 = 0{,}30\,v_0$, $v_2 = 0{,}82\,v_0$.

Пункт 2.

3. Кто куда полетел. Боковые поверхности гладкие, поэтому удар действует только вдоль линии центров $\vec{n}$ — и покоившаяся шайба полетит вдоль $\vec{n}$. У налетающей шайбы составляющая скорости поперёк $\vec{n}$ не меняется, а вдоль $\vec{n}$ при ударе одинаковых шайб с коэффициентом восстановления e ($0 < e < 1$ для частично упругого удара) становится $\frac{1-e}{2}v_{0n}$ — того же знака, что у мишени.

Пусть мишень полетела по a (под 45°): $v_{0n} = v_0 \cos 45°$, поперёк — $v_0 \sin 45°$. Налетающая уходит по c, под 60° к $\vec{n}$, поэтому $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{\sin 45°}{\frac{1-e}{2}\cos 45°}$, $1 - e = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $e = -0{,}15 < 0$ — невозможно.

Пусть мишень полетела по c (под 15°): $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{\sin 15°}{\frac{1-e}{2}\cos 15°}$, $1 - e = \dfrac{2\operatorname{tg} 15°}{\sqrt{3}} = 0{,}31$, $e = 0{,}69$ — подходит (рис. 4). Возможен один случай: *покоившаяся шайба уходит по c, налетающая — по a*. Числа ниже от этого выбора не зависят, но он показывает, что картина на рисунке осуществима.

4. Треугольник импульсов. $\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ — треугольник с углами 15° (между $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_2$), 45° (между $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$) и $180° - 60° = 120°$ (рис. 3). Теорема синусов: против угла 15° лежит p_1, против 45° — p_2, против

$120° — p_0$:

$$p_1 = p_0 \frac{\sin 15°}{\sin 120°} = 0{,}299\, p_0, \qquad p_2 = p_0 \frac{\sin 45°}{\sin 120°} = 0{,}816\, p_0.$$

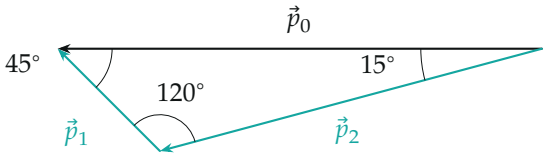

Рис. 3. Треугольник импульсов $\vec{p}_0 = \vec{p}_2 + \vec{p}_1$ в масштабе; углы 15°, 45°, 120°.

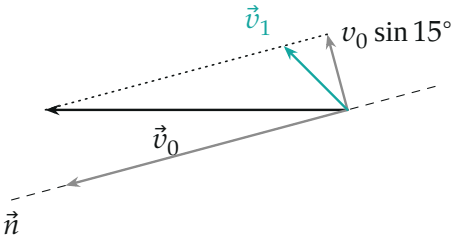

Рис. 4. Линия центров $\vec{n}$ — направление полёта мишени (c). Скорость $\vec{v}_0$ раскладывается вдоль $\vec{n}$ и поперёк (серые); после удара налетающая шайба сохраняет поперечную часть и малую продольную — её скорость $\vec{v}_1$ (бирюзовая) уходит по a, под 45° к $\vec{v}_0$.

5. Отношение путей. После удара каждая шайба тормозится силой трения μmg. Теорема о кинетической энергии: $\dfrac{p^2}{2m} = \mu mg\, S$, путь пропорционален p^2. Для шайб по *a* и по *c*:

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{p_1^2}{p_2^2} = \left(\frac{\sin 15°}{\sin 45°}\right)^2 = 0{,}134, \qquad \frac{S_c}{S_a} \approx 7{,}46.$$

Шайба, ушедшая по *c* (покоившаяся), проедет в 7,5 раза больше налетающей.

6. Доля энергии в тепло. Из шага 1 и шага 4:

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{p_1 p_2 \cos\theta/m}{p_0^2/(2m)} = \frac{2\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin^2 120^\circ},$$

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{2 \cdot 0{,}259 \cdot 0{,}707 \cdot 0{,}5}{0{,}75} \approx 0{,}24.$$

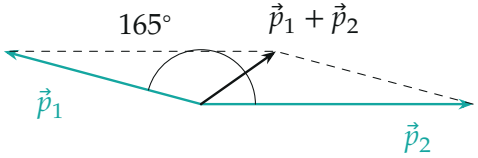

Рис. 5. Разлёт под тупым углом (налёт по a): сумма $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ короче, чем требует энергия, $p_0^2 < p_1^2 + p_2^2$ — энергия после удара больше, чем до, так не бывает.

Обратите внимание. Отношение путей зависит только от углов разлёта, а не от силы трения и скорости: трение одинаково для одинаковых шайб, и путь каждой пропорционален квадрату её начальной скорости.

Проверка. Энергии после удара: $0{,}299^2 + 0{,}816^2 = 0{,}089 + 0{,}667 = 0{,}756$ от E_0, тепло $1 - 0{,}756 = 0{,}244$ — совпадает с шагом 6. Предел: при упругом ударе одинаковых шайб разлёт под 90°, $\cos\theta = 0$, $Q = 0$; у нас $60^\circ < 90^\circ$ — тепло есть.

Ответ. 1) Налетающая шайба двигалась по траектории «b» (только у неё шайбы разлетаются под острым углом, 60°); 2) возможен один случай: налетающая уходит по «a» (под 45°), покоившаяся — по «c» (под 15°); А) $S_a/S_c = (\sin 15^\circ / \sin 45^\circ)^2 \approx 0{,}13$ ($S_c/S_a \approx 7{,}5$); Б) $Q/E_0 = \dfrac{2\sin 15^\circ \sin 45^\circ \cos 60^\circ}{\sin^2 120^\circ} \approx 0{,}24$.