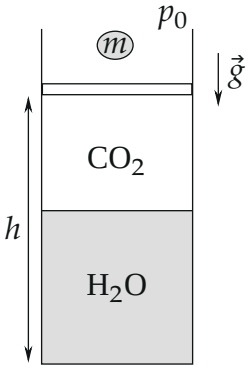
Газировка

Задача 10.3. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.3] «Газировка».

В вертикальном цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находятся вода и углекислый газ. Часть углекислого газа растворена в воде, а часть находится над водой в газообразном состоянии. Изначально вода занимает ровно половину объёма сосуда под поршнем (рис. 2). Расстояние от поршня до дна сосуда $h = 20$ см, площадь поршня $S = 10$ см^2. На поршень поместили гирю массы m_0 и, в результате установления равновесия, поршень сместился вниз на $\Delta h_1 = 3{,}12$ см. Затем на поршень поместили ещё одну, точно такую же, гирю, и поршень сместился ещё на $\Delta h_2 = 2{,}22$ см, вновь оказавшись в равновесии. Определите:

1. массу m_0 одной гири;
2. массу m_2 гири, которую необходимо добавить к двум первым, чтобы поршень опустился до поверхности воды.



Считайте, что температура в сосуде постоянна и при растворении углекислого газа уровень воды не изменяется. Поршень перемещается без трения. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

Примечание: масса газа, растворённого в жидкости, над которой находится этот же газ, прямо пропорциональна давлению этого газа (закон Генри).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на изотермический процесс с газом, часть которого «прячется» в воде. Гиря увеличивает давление, газ над водой сжимается, но одновременно часть его уходит в воду — поэтому поршень опускается сильнее, чем без воды. Закон Генри позволяет заменить растворённый газ «невидимым» добавочным столбом газа над водой; тогда вся задача — закон Бойля — Мариотта для этого удлинённого столба и условие равновесия поршня. Неизвестных два — давление одной гири и растворимость, опытов тоже два.

Обозначения. $x = m_0 g/(p_0 S)$ — добавочное давление одной гири в долях p_0; k — растворимость: в воде объёма $V_в$ при любом давлении p растворено столько газа, сколько занимало бы объём $kV_в$ при том же p; H — «эквивалентная высота» газа в начале (рис. 3); n — число гирь на поршне.

1. Равновесие поршня. Поршень невесом, трения нет. Второй закон Ньютона для поршня в проекции на вертикальную ось (рис. 2): $pS = p_0 S + nm_0 g$, то есть давление газа

$$p = p_0(1 + nx).$$

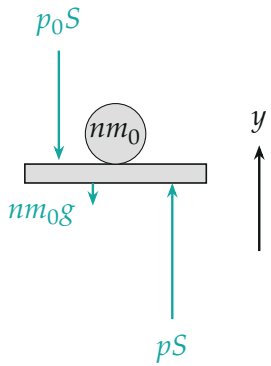


Рис. 2. Силы, действующие на поршень вместе с гирями: давление атмосферы p_0S и вес гирь nm_0g вниз, давление газа pS вверх. Длины стрелок — для $n = 1$: $pS = 1{,}2\,p_0S$.

2. Закон Генри — «добавочный» объём. В воде объёма $Sh/2$ при давлении p растворено столько газа, сколько при том же p занимало бы

объём $kSh/2$ над водой. Это верно при любом p (масса растворённого газа $\propto p$, и масса газа в заданном объёме тоже $\propto p$). Поэтому весь углекислый газ — и свободный, и растворённый — ведёт себя как газ в столбе высотой

$$(\text{высота газа над водой}) + \frac{kh}{2}$$

при общем давлении p (рис. 3). Вначале эта высота $H = \dfrac{h}{2} + \dfrac{kh}{2} = \dfrac{(1+k)h}{2}$.

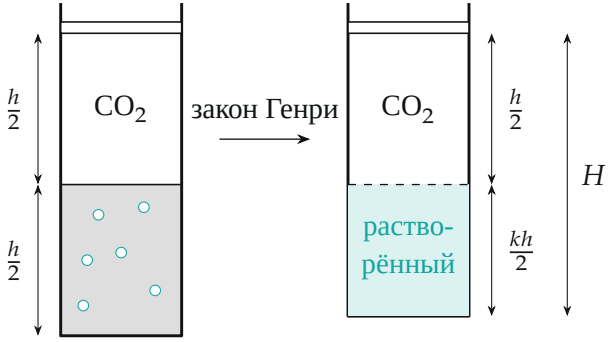


Рис. 3. Слева — сосуд: газ над водой и растворённый в воде (кружки). Справа — эквивалентный сосуд: растворённый газ заменён добавочным столбом газа высотой $kh/2$ при том же давлении (здесь $k = 0{,}85$, как выйдет в шаге 4).

3. Закон Бойля — Мариотта для двух опытов. Температура постоянна, количество газа в системе «газ + вода» постоянно, уровень воды не меняется. Когда поршень опустился на Δh, эквивалентная высота стала $H - \Delta h$. Закон Бойля — Мариотта для всего углекислого газа: $p_0 H = p\,(H - \Delta h)$. С одной гирей ($n = 1$) и с двумя ($n = 2$), где $D = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 5{,}34$ см — полное смещение:

$$p_0 H = p_0(1+x)(H - \Delta h_1), \qquad p_0 H = p_0(1+2x)(H - D).$$

Выразим H из каждого:

$$H = \frac{(1+x)\,\Delta h_1}{x}, \qquad H = \frac{(1+2x)\,D}{2x}.$$

Приравниваем: $2(1+x)\Delta h_1 = (1+2x)D$, откуда

$$x = \frac{2\Delta h_1 - D}{2(D - \Delta h_1)} = \frac{6{,}24 - 5{,}34}{2 \cdot 2{,}22} = 0{,}203 \approx 0{,}2.$$

Масса гири:

$$m_0 = \frac{x p_0 S}{g} = \frac{0{,}203 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{10}\ \text{кг} \approx 2{,}0\ \text{кг}.$$

4. Растворимость. $H = \dfrac{1{,}203 \cdot 3{,}12}{0{,}203}$ см $= 18{,}5$ см, и $k = \dfrac{2H}{h} - 1 = 0{,}85$. Без растворения было бы $H = h/2 = 10$ см: газ в воде почти удваивает «пружину».

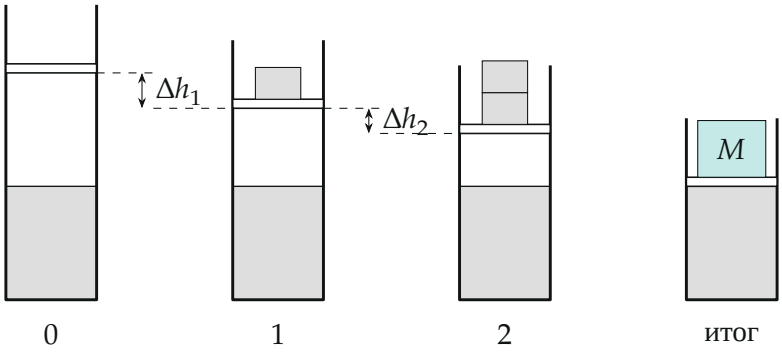


Рис. 4. Положения поршня в масштабе: без гирь, с одной, с двумя гирями и в конце, когда поршень дошёл до воды под общим грузом M. Числа внизу — число гирь.

Пункт 2. Поршень на поверхности воды. Газа над водой не осталось, эквивалентная высота — только добавочный столб $kh/2 = H - h/2$.

Закон Бойля — Мариотта:

$$p_0 H = p_x\left(H - \frac{h}{2}\right) \Rightarrow \frac{p_x}{p_0} = \frac{H}{H - h/2} = \frac{1+k}{k} = \frac{18{,}5}{8{,}5} = 2{,}175.$$

Условие равновесия поршня (шаг 1) с полным грузом M: $Mg = (p_x - p_0)S$,

$$M = \frac{1{,}175 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{10}\ \text{кг} = 11{,}75\ \text{кг},$$

$$m_2 = M - 2m_0 = 11{,}75 - 4{,}05 \approx 7{,}7\ \text{кг}.$$

Весь путь поршня — одна гипербола $p/p_0 = H/(H - \Delta h)$ (рис. 5): с каждым сантиметром газ сжимать всё труднее, поэтому на последние 4,7 см нужно почти вдвое больше груза, чем на первые 5,3.

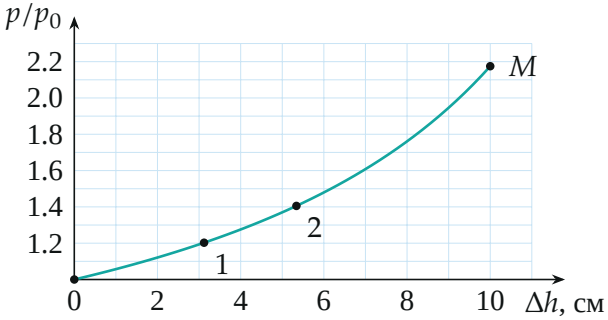


Рис. 5. Давление газа в зависимости от смещения поршня, $p/p_0 = H/(H - \Delta h)$ при $H = 18{,}5$ см. Точки — одна гиря, две гири и поршень на воде.

Обратите внимание. Ответ во втором пункте чувствителен к округлению: x находится по разности близких чисел $2\Delta h_1 - D = 0{,}90$ см. Если округлить x до 0,2 (а тогда $k \approx 0{,}87$), выйдет $m_2 \approx 7{,}5$ кг — так в ответе у организаторов; точный счёт по данным даёт 7,7 кг.

Соберём ответ.

$$m_0 = \frac{p_0 S}{g}\cdot\frac{2\Delta h_1 - D}{2(D - \Delta h_1)} \approx 2{,}0\ \text{кг}, \qquad m_2 = \frac{p_0 S}{g}\cdot\frac{h/2}{H - h/2} - 2m_0 \approx 7{,}7\ \text{кг}.$$

Проверка. Размерность: $p_0 S/g$ — кг, дроби безразмерны. Второй

способ — пересчитать смещение со второй гирей: $D = \dfrac{2xH}{1+2x} = \dfrac{0{,}405 \cdot 18{,}51}{1{,}405} = 5{,}34$ см, $\Delta h_2 = 2{,}22$ см — как в условии. Предел $k \to 0$ (газ не растворяется): $H = h/2$, и поршень дошёл бы до воды только при бесконечном грузе — верно, газ без «запаса» в воде не сжать в ноль.

Вода работает как резервуар: под давлением она принимает газ, и газ над ней сжимается легче, чем без неё.

Ответ. 1) $m_0 = \dfrac{p_0 S}{g} \cdot \dfrac{\Delta h_1 - \Delta h_2}{2\Delta h_2} \approx 2{,}0$ кг; 2) $m_2 \approx 7{,}7$ кг (при округлении $\Delta p/p_0 = 0{,}2$ получается 7,5 кг).