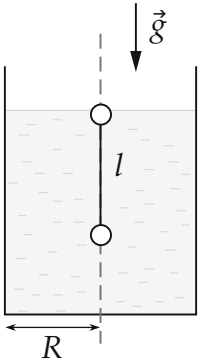
Крутится, вертится

Задача 10.4. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.4] «Крутится, вертится».

Два небольших шарика массами m_1 и $m_2 > m_1$, соединённые тонкой нитью длиной l, плавают в цилиндрическом сосуде радиуса R, наполненном водой. При этом нить натянута с силой T_0. Сосуд раскрутили с некоторой угловой скоростью вокруг вертикальной оси, совпадающей с осью сосуда. После того, как система пришла в состояние равновесия, нить оказалась натянутой под углом α к вертикали (отличным от нуля), а шарики не касались дна сосуда.



Найдите новую силу натяжения нити T и угловую скорость вращения сосуда ω.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на динамику тел в жидкости, которая вращается как целое. В покое лёгкий шарик тянет нить вверх, тяжёлый — вниз, нить вертикальна. При вращении вода давит на каждый шарик не только вверх, но и к оси — ровно с той силой, которая нужна, чтобы такой же объём воды крутился по окружности. Лёгкому шарику этой силы «слишком много» — его тянет к оси, тяжёлому «слишком мало» — его уносит к стенке. Нить наклоняется, тяжёлый шарик прижимается к стенке. Законы — второй закон Ньютона для каждого шарика и приём «замени шарик водой» для силы Архимеда.

Обозначения. ρ — плотность воды; V_1, V_2 — объёмы шариков (у лёгкого — погружённая часть); r_1 — расстояние от оси до лёгкого шарика; $\vec{a}$ — ускорение шарика (центростремительное, к оси, $a = \omega^2 r$); $\vec{F}_\text{A}$ — сила Архимеда; $\vec{N}$ — сила реакции стенки.

1. Сила Архимеда во вращающейся воде. Мысленно заменим шарик водой того же объёма. Вода в установившемся вращении движется вместе с сосудом, значит, этот «водяной шарик» имеет то же ускорение $\vec{a}$, что и настоящий. На него действуют только сила тяжести и давление окружающей воды — та же сила Архимеда, ведь давление воды от содержимого объёма не зависит. Второй закон Ньютона для водяного шарика: $\rho V\vec{a} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_\text{A}$, откуда

$$\vec{F}_\text{A} = \rho V(\vec{a} - \vec{g}).$$

Сила Архимеда направлена против вектора $\vec{g} - \vec{a}$: вверх с модулем проекции $\rho V g$ и к оси с модулем проекции $\rho V\omega^2 r$ (рис. 3).

2. Где окажутся шарики. Второй закон Ньютона для шарика массы m без нити: $m\vec{a}' = m\vec{g} + \rho V(\vec{a} - \vec{g})$. Шарик держался бы на окружности ($\vec{a}' = \vec{a}$) только при $m = \rho V$. У лёгкого шарика $m_1 < \rho V_1$ (он тянет нить вверх), и сила Архимеда больше нужной — его тянет к оси и вверх; у тяжёлого $m_2 > \rho V_2$ — его уносит от оси и вниз. Нить связывает их, поэтому тяжёлый шарик упирается в стенку, а лёгкий висит ближе к оси и выше (рис. 2): $r_1 = R - l\sin\alpha$ (шарики малы).

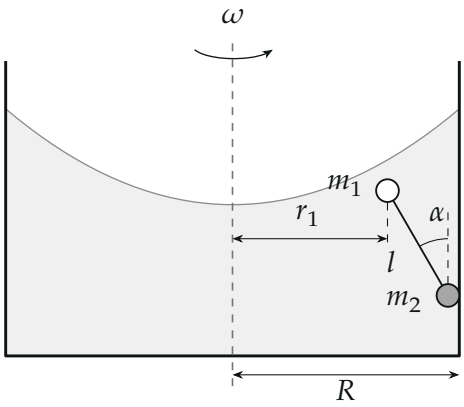


Рис. 2. Установившееся вращение (построено для $\alpha = 30°$). Поверхность воды — параболоид; тяжёлый шарик прижат к стенке, лёгкий ближе к оси, $r_1 = R - l\sin\alpha$.

3. Лёгкий шарик — угловая скорость. Второй закон Ньютона для лёгкого шарика: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \rho V_1(\vec{a} - \vec{g}) + \vec{T}_1$, где $\vec{T}_1$ — сила нити на него. Отсюда

$$\vec{T}_1 = (\rho V_1 - m_1)(\vec{g} - \vec{a}).$$

Множитель $\rho V_1 - m_1 > 0$, значит нить направлена вдоль вектора $\vec{g} - \vec{a}$: вниз и от оси. Его вертикальная составляющая g, горизонтальная $\omega^2 r_1$ (рис. 3). Нить отклонена от вертикали на α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 r_1}{g} \;\Rightarrow\; \omega = \sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{R - l\sin\alpha}}.$$

Это та же картина, что у поверхности воды: в каждой точке «эффективная тяжесть» $\vec{g} - \vec{a}$ перпендикулярна изобарам, и нить с лёгким шариком становится вдоль неё, как отвес.

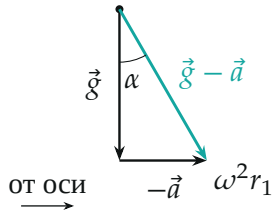


Рис. 3. «Эффективная тяжесть» $\vec{g} - \vec{a}$ у лёгкого шарика: вниз на g и от оси на $\omega^2 r_1 = g\operatorname{tg}\alpha$. Вдоль неё натянута нить; сила Архимеда направлена против неё.

4. Тяжёлый шарик — натяжение. Тяжёлый шарик движется по окружности в горизонтальной плоскости, его вертикальное ускорение равно нулю. На него действуют: сила тяжести $m_2 g$ вниз, сила Архимеда (вертикальная проекция $\rho V_2 g$ вверх), натяжение T вдоль нити — вверх и к оси под углом α к вертикали, сила реакции стенки N — горизонтально к оси (рис. 4). Второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось y:

$$T\cos\alpha + \rho V_2 g - m_2 g = 0.$$

До раскрутки нить была вертикальна и тот же закон давал $T_0 + \rho V_2 g - m_2 g = 0$. Вычитаем:

$$T\cos\alpha = T_0 \;\Rightarrow\; T = \frac{T_0}{\cos\alpha}.$$

Натяжение выросло: вертикальная проекция нити осталась прежней, а нить наклонилась.

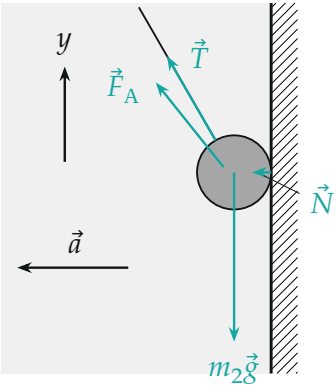


Рис. 4. Силы на тяжёлом шарике у стенки (длины — для $m_2 = 2\rho V_2$, $\alpha = 30°$): вертикальные проекции T и F_A вместе уравновешивают $m_2 g$; горизонтальные вместе с N дают ускорение $\vec{a}$ к оси.

5. Сила реакции стенки — проверка картины. Шарик действительно прижат к стенке, если $N > 0$. Второй закон Ньютона в проекции на горизонтальную ось к оси вращения: $T\sin\alpha + \rho V_2\omega^2 R + N = m_2\omega^2 R$, то есть

$$N = (m_2 - \rho V_2)\omega^2 R - T\sin\alpha =$$

$$= T_0\left(\frac{\omega^2 R}{g} - \operatorname{tg}\alpha\right) = T_0\operatorname{tg}\alpha\,\frac{l\sin\alpha}{R - l\sin\alpha} > 0.$$

Положительна — значит, стенка действительно держит шарик, картина рис. 2 согласована.

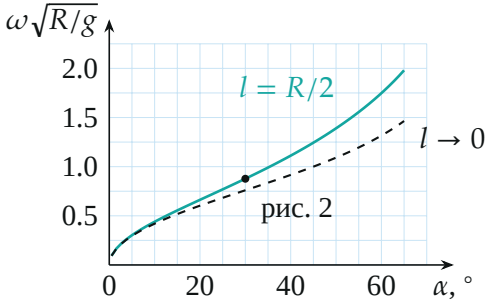


Рис. 5. Угловая скорость, нужная для угла α, в единицах $\sqrt{g/R}$: сплошная — $l = R/2$, пунктир — короткая нить ($r_1 \approx R$).

Обратите внимание. Сила Архимеда во вращающейся воде не вертикальна: у неё есть составляющая к оси $\rho V\omega^2 r$. Если взять только ρVg вверх, лёгкий шарик «не почувствует» вращения, и угол выйдет неверным.

Соберём ответ.

$$T = \frac{T_0}{\cos\alpha}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R - l\sin\alpha}}.$$

Проверка. Размерность: $g\,\mathrm{tg}\,\alpha/(R - l\sin\alpha)$ — c^{-2}, ω — c^{-1}, верно. Предел $\alpha \to 0$: $\omega \to 0$ и $T \to T_0$ — покой. Второй способ для ω — по поверхности воды: в покоящейся относительно сосуда воде изобары — параболоиды $y = \omega^2 r^2/(2g)$, их наклон в точке r_1 равен $\omega^2 r_1/g$; нить с лёгким шариком перпендикулярна изобаре (как отвес — горизонту), значит $\mathrm{tg}\,\alpha = \omega^2 r_1/g$ — то же. Ответ от масс не зависит: всё определяет T_0 и геометрия.

Вода во вращающемся сосуде — новая «гравитация» $\vec{g} - \vec{a}$, и нить с поплавком работает как отвес этой гравитации.

Ответ. $T = \dfrac{T_0}{\cos\alpha}$; $\omega = \sqrt{\dfrac{g\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R - l\sin\alpha}}$.