Три элемента

Задача 10.5. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 10 класс, задача 10.5] «Три элемента».

Внутри «чёрного ящика» (ЧЯ), имеющего два вывода, собрана цепь, состоящая из трёх элементов: резистора с сопротивлением $R = 3{,}5$ Ом, диода с некоторым напряжением открытия $U_0 > 0$ (вольтамперная характеристика (ВАХ) диода представлена на рис. 3) и неизвестного нелинейного элемента X. Известно, что ВАХ неизвестного элемента X монотонна (при увеличении напряжения на элементе сила тока, протекающего через него, не убывает). Вольтамперная характеристика «чёрного ящика» показана на рис. 4.

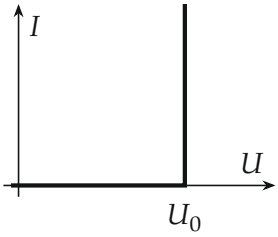

Рис. 3. ВАХ диода.

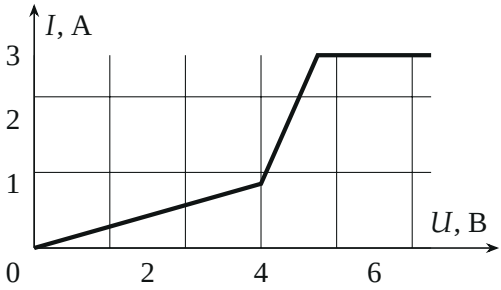

Рис. 4. ВАХ «чёрного ящика».

1. Возможные схемы соединения элементов в «чёрном ящике» (при некотором напряжении на выводах чёрного ящика ток должен протекать через все элементы). Свой ответ обоснуйте.
2. Найдите возможные значения напряжения открытия диода U_0.

3. Восстановите ВАХ неизвестного нелинейного элемента X. Если возможны различные значения напряжения открытия диода, то постройте ВАХ нелинейного элемента для случаев максимально возможного напряжения U_{max} открытия диода и ещё одного значения U_N открытия диода, выраженного целым числом вольт.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на «чёрный ящик» с нелинейными элементами: схему и неизвестную ВАХ восстанавливают по правилам сложения ВАХ. При последовательном соединении ток общий, напряжения складываются — ВАХ складываются по горизонтали (вдоль оси U); при параллельном напряжение общее, токи складываются — по вертикали. ВАХ ящика имеет три характерные черты: ток есть при сколь угодно малом напряжении, на 4 В излом, а выше 5 В ток перестаёт расти — насыщение на 3 А. Каждая черта говорит о схеме.

Обозначения. U, I — напряжение и ток ящика; $U_{RD}(I)$ — напряжение на участке «резистор и диод» при токе I; $U_X(I)$ — напряжение на элементе X; $I_0 = U_0/R$ — ток, при котором открывается диод, включённый параллельно резистору.

Пункт 1. Схема.

1. Насыщение — дело элемента X. Выше 5 В ток ящика равен 3 А и не растёт. Резистор, диод и любые их соединения так не умеют: ток резистора растёт пропорционально напряжению, открытый диод пропускает любой ток. Значит, ток ограничивает X.

2. X включён последовательно со всем остальным. Если бы параллельно X стоял ещё какой-то участок (резистор или диод), то с ростом напряжения ток через этот участок рос бы неограниченно, и общий ток насыщаться не смог бы. Значит, весь ток ящика идёт через X: X последователен с участком из резистора и диода.

3. Резистор и диод — параллельно. При малых напряжениях ($U < U_0$) диод закрыт. Если бы диод стоял последовательно с резистором, при малых U тока не было бы вовсе. А на ВАХ ящика ток есть с самого нуля ($I = U/4$ Ом). Значит, диод и резистор соединены параллельно (рис. 5). Другие перестановки тоже отпадают: если диод последователен со всей цепью — нет тока при малых U; если диод параллелен X — открытый диод снял бы насыщение.

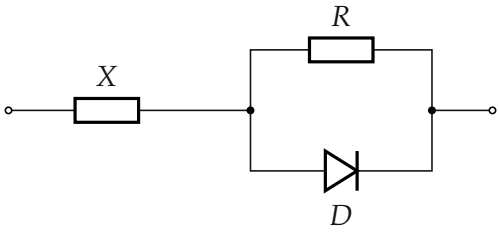

Рис. 5. Единственная возможная схема: элемент X последовательно с параллельно соединёнными резистором R и диодом D.

Пункт 2. Напряжение открытия диода.

4. ВАХ участка «резистор и диод». При $U < U_0$ диод закрыт, ток идёт только через резистор: $I = U/R$. Когда напряжение на участке дошло до U_0, диод открывается и дальше держит напряжение U_0 при любом токе. Значит (рис. 6), при токе меньше $I_0 = U_0/R$ на участке $U_{RD} = IR$, при большем — $U_{RD} = U_0$.

5. Вычитание ВАХ. Ток через X и участок общий, напряжения складываются:

$$U_X(I) = U(I) - U_{RD}(I).$$

ВАХ ящика по рис. 4, записанная как напряжение при данном токе:

$$U(I) = \begin{cases} 4I, & 0 \le I \le 1\ \text{А}, \\ 4 + \dfrac{I-1}{2}, & 1 \le I \le 3\ \text{А} \end{cases}$$

(напряжение в вольтах, ток в амперах; при $I = 3$ А напряжение — любое от 5 В и выше).

6. Почему $U_0 \le 3{,}5$ В. Пусть диод открывается при токе $I_0 = U_0/R > 1$ А, то есть $U_0 > 3{,}5$ В. Тогда на участке $1\ \text{А} < I < I_0$ диод ещё закрыт и

$$U_X = 4 + \frac{I-1}{2} - 3{,}5I = 3{,}5 - 3I,$$

напряжение на X *убывает* при росте тока. Это значит, что ток через X растёт, когда напряжение на нём падает, — противоречит монотонности ВАХ X (рис. 8, $U_0 = 4$ В: участок X «загибается» назад). А при

$U_0 > 4{,}5$ В на этом участке U_X стало бы даже отрицательным при положительном токе. Значит, $I_0 \le 1$ А и

$$0 < U_0 \le IR|_{I=1\text{ А}} = 3{,}5\text{ В}, \qquad U_{max} = 3{,}5\text{ В}.$$

Тот же результат через напряжения: в точке открытия диода ток $I_0 \le 1$ А, а на ящике тогда $U = I_0 \cdot 4$ Ом, поэтому $U_0 = I_0 R = \frac{7}{8}U \le \frac{7}{8}\cdot 4 = 3{,}5$ В.

7. При $U_0 \le 3{,}5$ В монотонность есть. Для $I \le I_0$: $U_X = 4I - 3{,}5I = 0{,}5I$; для $I_0 \le I \le 1$: $U_X = 4I - U_0$; для $1 \le I \le 3$: $U_X = 4 + \dfrac{I-1}{2} - U_0$; при $I = 3$ А $U_X \ge 5 - U_0$. Везде U_X растёт с ростом I и неотрицательно — подходит любое U_0 из $(0;\ 3{,}5]$ В.

Пункт 3. ВАХ элемента X.

8. $U_{max} = 3{,}5$ **В.** $I_0 = 1$ А. До 1 А: $U_X = 0{,}5I$; от 1 до 3 А: $U_X = 4 + (I-1)/2 - 3{,}5 = 0{,}5I$ — та же прямая. Итог: $I = 2U$ при $0 \le U \le 1{,}5$ В, далее $I = 3$ А при $U \ge 1{,}5$ В (рис. 6, бирюзовая).

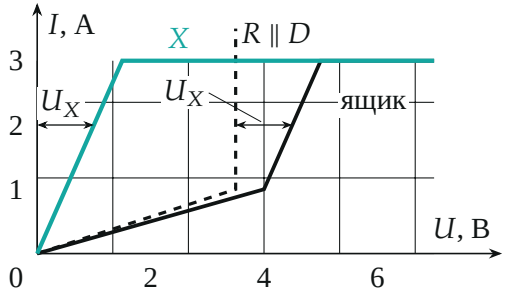

Рис. 6. $U_0 = U_{max} = 3{,}5$ В. Чёрная сплошная — ящик, пунктир — резистор с диодом, бирюзовая — элемент X: при каждом токе отрезок от пунктира до ящика равен U_X (показано для $I = 2$ А: $U_X = 1$ В).

9. Целое $U_N = 2$ В. $I_0 = 2/3{,}5 = 0{,}571$ А. Три участка:

$$\begin{aligned} &0 \le I \le 0{,}571\text{ А}: && U_X = 0{,}5I, && U_X \text{ от 0 до } 0{,}286\text{ В};\\ &0{,}571 \le I \le 1\text{ А}: && U_X = 4I - 2, && U_X \text{ от } 0{,}286 \text{ до } 2\text{ В};\\ &1 \le I \le 3\text{ А}: && U_X = 3 + \tfrac{I-3}{2}, && U_X \text{ от 2 до 3 В}, \end{aligned}$$

дальше $I = 3$ А при $U_X \ge 3$ В. ВАХ X — ломаная через точки $(0;\ 0)$,

(0,29 В; 0,57 А), (2 В; 1 А), (3 В; 3 А) и горизонталь (рис. 7). Подошли бы и $U_N = 1$ В или 3 В — построение то же.

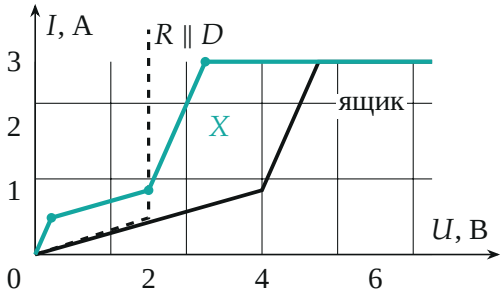

Рис. 7. $U_0 = U_N = 2$ В: ящик (сплошная), резистор с диодом (пунктир) и ВАХ элемента X (бирюзовая, точки — изломы).

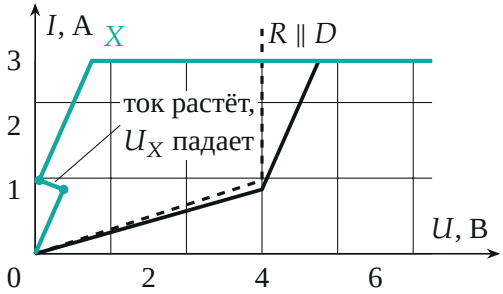

Рис. 8. Если бы $U_0 = 4$ В: вычитание даёт для X участок, где ток растёт при уменьшении напряжения (от 1 до 1,14 А) — запрещено условием. Поэтому $U_0 \le 3{,}5$ В.

Обратите внимание. ВАХ вычитают *по горизонтали* — при одинаковом токе, потому что элементы последовательны. Вычитание токов при одинаковом напряжении здесь дало бы бессмыслицу.

Соберём ответ. Схема: X последовательно с $(R \parallel D)$; $0 < U_0 \le 3{,}5$ В; при $U_0 = 3{,}5$ В — $I = 2U$ до 1,5 В, затем $I = 3$ А; при $U_0 = 2$ В — ломаная $(0;0)$, $(0{,}29;\ 0{,}57)$, $(2;\ 1)$, $(3;\ 3)$, далее 3 А.

Проверка. Сложим обратно для $U_0 = 2$ В при $I = 2$ А: $U_X = 2{,}5$ В, $U_{RD} = 2$ В, сумма 4,5 В — на ВАХ ящика при 4,5 В ток $1 + 2 \cdot 0{,}5 = 2$ А, сходится. При малых токах $U_X = 0{,}5I$, $U_{RD} = 3{,}5I$, сумма $4I$ —

начальный наклон ящика 4 Ом. Насыщение X на 3 А и есть насыщение ящика.

Вся схема угадывается по трём чертам ВАХ: ток с нуля — параллельный резистор, насыщение — последовательный ограничитель, монотонность X — верхняя граница U_0.

Ответ. 1) элемент X включён последовательно с участком, где резистор и диод соединены параллельно (других схем нет); 2) $0 < U_0 \leq 3{,}5$ В, $U_{max} = 3{,}5$ В; 3) при $U_0 = 3{,}5$ В: $I = 2U$ при $0 \leq U \leq 1{,}5$ В и $I = 3$ А при $U \geq 1{,}5$ В; при $U_N = 2$ В: ломаная через точки $(0;\ 0)$, $(0{,}29$ В; $0{,}57$ А$)$, $(2$ В; 1 А$)$, $(3$ В; 3 А$)$, далее $I = 3$ А.