Газировка (II)

Задача 1. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 11 класс, практический тур, задача 1] «Газировка (II)».

Некоторые газы хорошо растворяются в жидкостях. Например, углекислый газ прекрасно растворяется в воде, что используется при приготовлении всем хорошо знакомой газировки. При постоянной температуре и не слишком больших давлениях количество газа, растворённого в жидкости, прямо пропорционально парциальному давлению этого газа над жидкостью (закон Генри):

$$\nu = \alpha V p,$$

где V — объём жидкости, p — парциальное давление газа, α — коэффициент, зависящий от температуры и измеряемый в моль/(Па·м^3).

1. Убедитесь, что силы трения поршня о стенки корпуса шприца малы по сравнению с силой атмосферного давления на поршень. Опишите, как вы это сделали.
2. Определите давление газа в бутылке газированной воды.
3. Определите величину α для углекислого газа и воды при комнатной температуре.

Считайте, что внутри бутылки находятся углекислый газ в газообразном состоянии и вода с растворённым в ней углекислым газом. При аккуратном открытии бутылки (не трясите её и не взбалтывайте перед этим!) за малый промежуток времени изменение концентрации газа в растворе незначительно.

Оборудование: 1) две бутылки минеральной газированной воды; 2) шприц 20 мл; 3) заглушка на шприц; 4) одноразовый стакан 200 мл; 5) одноразовая пластиковая тарелка и салфетки для поддержания рабочего места в чистоте.

Примечания: 1) Рекомендуется одну бутылку использовать для пробных экспериментов, а вторую для итоговых. Не рекомендуется трясти бутылку перед тем, как её открывать. 2) Если вода находится в спокойном состоянии, то концентрация растворённого в ней газа приходит в

равновесное состояние за относительно длительное время, но, если воду перемешивать или взбалтывать (в закрытой бутылке), равновесное состояние устанавливается гораздо быстрее (несколько минут).

▲ **Решение.** **Что происходит.** Шприц с заглушкой — это сосуд, в котором поршень сам устанавливает давление, равное атмосферному p_0 (если трение мало). Порция газировки, набранная в шприц, «помнит» давление p в бутылке: в ней растворено $\alpha V p$ молей газа. В шприце над ней давление p_0, излишек газа выходит из раствора, и по объёму выделившегося газа находится α. Давление в бутылке измерим «манометром» из того же шприца: пузырь воздуха в нём, опущенный в бутылку, сожмётся по закону Бойля — Мариотта. Это экспериментальная задача на закон Генри, уравнение Менделеева — Клапейрона и закон сохранения вещества.

Обозначения. $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па — атмосферное давление, p — давление газа в бутылке, $V_в$ — объём порции воды в шприце, $V_г$ — объём газа, выделившегося из неё в шприце, V_1, V_2 — объём воздуха в шприце-«манометре» до и после погружения в бутылку, $T = 298$ К.

Пункт 1. Трение мало. Выдвигаем поршень на отметку 20 мл, закрываем носик заглушкой. Вдвигаем поршень до отметки 10 мл — воздух сжат вдвое, на поршень изнутри давит $2p_0$ — и отпускаем: поршень возвращается практически к отметке 20 мл. Так же выдвигаем поршень до 30–40 мл (давление $\approx p_0/2$) и отпускаем: он возвращается почти на место. Если бы сила трения $F_{тр}$ была сравнима с $p_0 S$ (S — площадь поршня), поршень застревал бы там, где разность сил давления равна трению: недоход ΔV до 20 мл даёт оценку

$$\frac{F_{тр}}{p_0 S} \approx \frac{\Delta V}{V}.$$

Недоход меньше одного деления (0,5 мл из 20), то есть $F_{тр} \lesssim 0{,}03\, p_0 S$ — трение мало, и давление газа под свободным поршнем равно p_0 с точностью в несколько процентов (рис. 1).

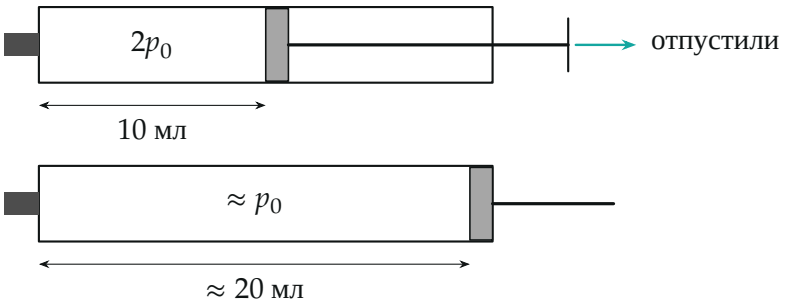

Рис. 1. Проверка трения: воздух в шприце с заглушкой сжат вдвое; отпущенный поршень возвращается почти к исходной отметке 20 мл.

Пункт 2. Давление в бутылке. Выдвигаем поршень шприца до отметки $V_1 = 20$ мл, надеваем заглушку и опускаем шприц в открытую бутылку, сразу закрываем пробку (рис. 2). Встряхиваем бутылку 5–10 минут: газ из воды заполняет пространство над ней, давление в бутылке возвращается к равновесному p, и поршень сжимает воздух шприца до объёма V_2. Закон Бойля — Мариотта для воздуха в шприце (температура постоянна, трение мало, давление под поршнем равно давлению в бутылке):

$$p_0 V_1 = p V_2 \quad \Rightarrow \quad p = p_0 \frac{V_1}{V_2}.$$

Измерено: $V_1 = (20{,}0 \pm 0{,}5)$ мл, $V_2 = (7{,}0 \pm 0{,}5)$ мл. Тогда

$$p = 1\text{ атм} \cdot \frac{20{,}0}{7{,}0} \approx 2{,}86\text{ атм}, \qquad \frac{\Delta p}{p} = \sqrt{\left(\frac{0{,}5}{20}\right)^2 + \left(\frac{0{,}5}{7}\right)^2} \approx 0{,}08,$$

$p = (2{,}9 \pm 0{,}2)$ атм. Измерение делаем один раз: при каждом открытии бутылки часть газа теряется (около 5 % на измерение).

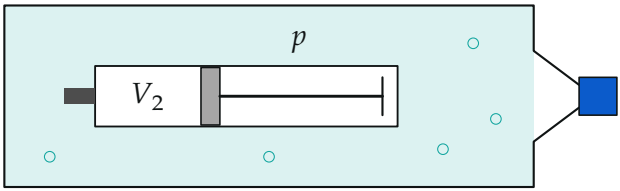

Рис. 2. Шприц с заглушкой и воздухом внутри закрытой бутылки: давление в бутылке сжимает воздух с $V_1 = 20$ мл (при p_0) до V_2.



Рис. 3. Фото опыта из решения организаторов: шприц-«манометр» в бутылке, поршень сдвинулся к отметке 7 мл.

Пункт 3. Коэффициент α.

1. Опыт. Открываем вторую бутылку, сразу набираем в пустой шприц $V_в = 5{-}8$ мл газировки и закрываем носик заглушкой (рис. 4). В воде растворено столько газа, сколько соответствует давлению p в бутылке. Встряхиваем шприц: газ выходит из раствора, поршень свободно отходит, давление над водой остаётся p_0. Когда объём газа перестаёт расти, записываем $V_г$. Бутылку каждый раз закрываем.

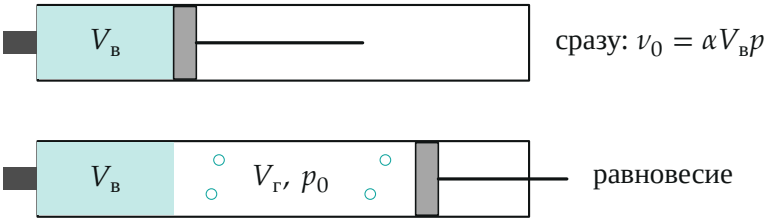

Рис. 4. Порция газировки в шприце: сразу после набора и после встряхивания — из воды выделился газ объёмом $V_г$ при давлении p_0.

2. Формула. Закон сохранения количества углекислого газа в шприце: сколько было растворено в порции при давлении p, столько стало в

растворе при давлении p_0 плюс в газовой фазе. По закону Генри и уравнению Менделеева — Клапейрона:

$$\alpha V_\text{в} p = \alpha V_\text{в} p_0 + \frac{p_0 V_\text{г}}{RT} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{p_0}{RT\,(p - p_0)} \cdot \frac{V_\text{г}}{V_\text{в}}.$$

Газ в шприце — чистый углекислый (воздуха в шприце не было), поэтому его парциальное давление над водой равно p_0. В бутылке парциальное давление CO_2 и есть p (по условию над водой только углекислый газ).

3. Данные и обработка. Пять опытов при $T = 298$ К; для каждого $p - p_0 = 1{,}86$ атм $= 1{,}88 \cdot 10^5$ Па, α — в моль/(Па·м^3):

№	$V_\text{в}$, мл	$V_\text{г}$, мл	$V_\text{г}/V_\text{в}$	$\alpha \cdot 10^4$
1	6	10,5	1,75	3,8
2	6	10,5	1,75	3,8
3	7	11,0	1,57	3,4
4	5	8,5	1,70	3,7
5	7,5	12,5	1,67	3,6

Например, для опыта 1:

$$\alpha = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 \cdot 1{,}75}{8{,}31 \cdot 298 \cdot 1{,}88 \cdot 10^5} \frac{\text{моль}}{\text{Па} \cdot \text{м}^3} = 3{,}8 \cdot 10^{-4} \frac{\text{моль}}{\text{Па} \cdot \text{м}^3}.$$

Среднее $\bar{\alpha} = 3{,}67 \cdot 10^{-4}$, случайная погрешность среднего $\sigma/\sqrt{5} \approx 0{,}07 \cdot 10^{-4}$. Второй способ — график $V_\text{г}(V_\text{в})$ (рис. 5): точки ложатся на прямую через начало координат, наклон по методу наименьших квадратов $k = \sum V_\text{в} V_\text{г} / \sum V_\text{в}^2 = 1{,}68$, и $\alpha = k p_0/(RT(p - p_0)) = 3{,}65 \cdot 10^{-4}$ моль/(Па·м^3) — то же.

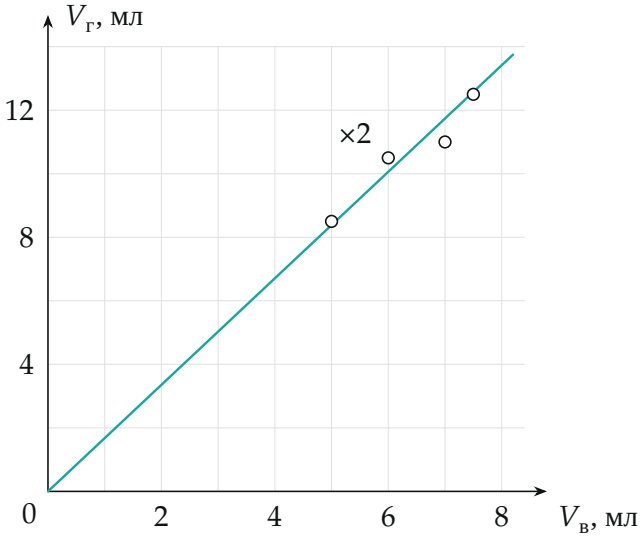

Рис. 5. Объём выделившегося газа от объёма воды (точка (6; 10,5) повторена дважды). Прямая через начало — метод наименьших квадратов, наклон $k = 1{,}68$.

4. Погрешность. Систематическая — от точности отсчёта объёмов ($\pm 0{,}5$ мл) и давления:

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta V_г}{V_г}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_в}{V_в}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(p - p_0)}{p - p_0}\right)^2},$$

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \approx \sqrt{0{,}05^2 + 0{,}08^2 + 0{,}12^2} \approx 0{,}16,$$

она много больше случайной. Итог: $\alpha = (3{,}7 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-4}$ моль/(Па·м^3).

Обратите внимание. Ошибка в $p - p_0$ входит в α сильнее всего: разность почти вдвое меньше самого p, и относительная погрешность у неё больше. Поэтому давление в бутылке стоит мерить при наибольшем начальном объёме воздуха в шприце (20 мл) — так V_2 отсчитывается точнее.

Проверка. Размерность: $p_0 V_г/(RT)$ — моли, $V_в(p - p_0)$ — м^3·Па, их отношение — моль/(Па·м^3), как у α. Табличная растворимость CO_2 в воде при 25°C — около $3{,}4 \cdot 10^{-4}$ моль/(Па·м^3) (константа Генри ≈

0,034 моль/(л·атм)), наш результат с ней согласуется в пределах погрешности.

Ответ. 1) Воздух в шприце с заглушкой сжимаем вдвое (и растягиваем) — отпущенный поршень возвращается к исходной отметке с недоходом меньше 0,5 мл из 20: $F_{\text{тр}} \lesssim 0{,}03\,p_0 S$; 2) $p = p_0 V_1 / V_2 \approx (2{,}9 \pm 0{,}2)$ атм; 3) $\alpha = \dfrac{p_0 V_{\text{г}}}{RT(p - p_0)V_{\text{в}}} = (3{,}7 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-4}$ моль/(Па·м^3).