Диполь в шаре

Задача 1. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 11 класс, задача 1] «Диполь в шаре».

В большом однородном непроводящем шаре вдоль диаметра d просверлен узкий канал. Шар равномерно заряжен по объёму с объёмной плотностью заряда $\rho > 0$ и закреплён. Вещество шара не поляризуется.

Ко входу в канал подносят диполь, образованный двумя заряженными шариками одинаковой массы, закреплёнными на концах лёгкого жёсткого непроводящего стержня, и отпускают. Через время $t_д$ он оказывается на противоположном конце канала. Когда то же самое проделывают с одним из шариков, он пролетает канал за время $t_ш$. Определите плечо диполя l, считая, что $l \ll d$. Укажите знак ближнего к шару заряда диполя в момент старта в первом случае и знак заряда шарика во втором. Диаметр шариков практически равен диаметру канала.

Примечание. Диполем называется система из двух одинаковых по величине, но разных по знаку электрических зарядов, находящихся на фиксированном расстоянии l (плечо диполя) друг от друга.

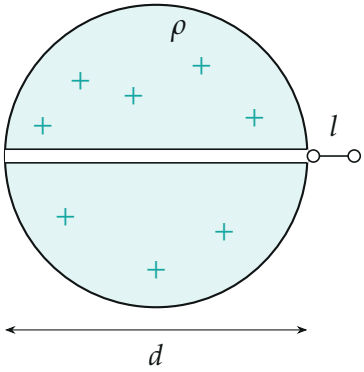

Рис. 1. Поясняющий рисунок: заряженный шар с каналом вдоль диаметра, у входа — диполь.

▲ **Решение. Что происходит.** Внутри однородно заряженного шара поле растёт от центра линейно. Поэтому на точечный заряд в канале действует сила, пропорциональная смещению от центра, — одиночный шарик колеблется гармонически. А на диполь действует разность сил на

двух его концах, и при линейном поле эта разность одна и та же в любой точке канала — диполь движется равноускоренно. Сравнив два времени, найдём l. Задача на теорему Гаусса и второй закон Ньютона.

Обозначения. Ось x — вдоль канала, начало в центре шара O, $R = d/2$ — радиус шара; q — модуль заряда каждого шарика, m — масса шарика; $E_x(x)$ — проекция напряжённости на ось x.

1. Поле в канале. Канал узкий, его влиянием на поле пренебрегаем. Теорема Гаусса для сферы радиуса $r < R$ с центром O: внутри неё заряд $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$, поле направлено по радиусу, поэтому

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\,\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

Вдоль канала поле направлено от центра ($\rho > 0$), в проекции на ось x

$$E_x(x) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,x, \qquad |x| \le R,$$

и эта формула верна по обе стороны от центра (рис. 2). Снаружи шара поле убывает как $1/x^2$.

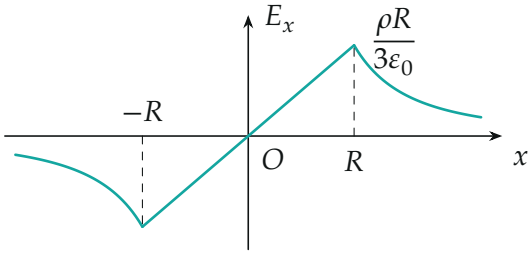

Рис. 2. Проекция напряжённости на ось канала: внутри шара — прямая через центр, снаружи — убывание как $1/x^2$.

2. Сила на диполь. Пусть диполь стартует у входа $x = R$ и движется к центру. Заряды диполя — в точках x_1 (ближний к центру шара) и $x_2 = x_1 + l$ (дальний). Сумма кулоновских сил в проекции на ось x:

$$F_x = q_1 E_x(x_1) + q_2 E_x(x_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,(q_1 x_1 + q_2 x_2).$$

Заряды равны по модулю и противоположны. Если ближний заряд положительный, $q_1 = q$, $q_2 = -q$:

$$F_x = \frac{\rho q}{3\varepsilon_0}(x_1 - x_2) = -\frac{\rho q\, l}{3\varepsilon_0}.$$

Сила не зависит от положения диполя и направлена к центру и дальше, по ходу движения (рис. 3): на положительный заряд поле давит наружу, на отрицательный — внутрь, а отрицательный стоит дальше от центра, где поле сильнее. При обратной ориентации сила выталкивает диполь — внутрь он не пойдёт. Значит, *ближний к шару заряд диполя положителен*. Стержень жёсткий и лежит вдоль узкого канала, развернуться диполь не может, и за центром сила остаётся той же: $x_1 - x_2 = -l$ при любом x_1.

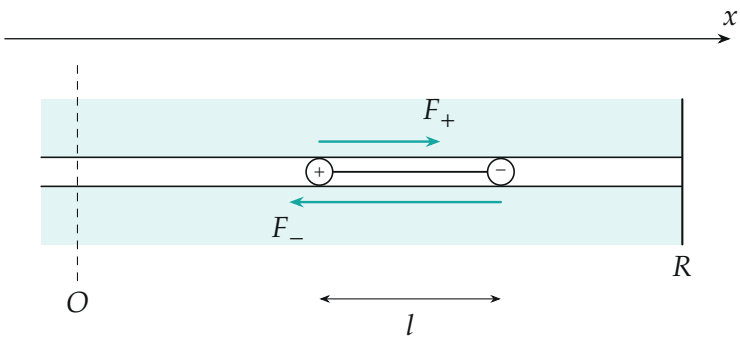

Рис. 3. Диполь в канале (l показано сильно увеличенным). Силы пропорциональны расстояниям зарядов до центра: $F_+ \propto x_1$, $F_- \propto x_2$; их разность $\rho q l/(3\varepsilon_0)$ тянет диполь к центру.

3. Время пролёта диполя. Второй закон Ньютона для диполя массы $2m$ в проекции на ось x: $2ma_x = F_x$, ускорение постоянно по модулю

$$a = \frac{\rho q\, l}{6\varepsilon_0 m}.$$

Стартуя из покоя, он проходит канал длины d (плечо $l \ll d$ на путь не

влияет) равноускоренно:

$$d = \frac{a\,t_д^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_д^2 = \frac{2d}{a} = \frac{12\,\varepsilon_0 m\,d}{\rho q\,l}.$$

Пока диполь у входа, один заряд снаружи шара, и формула шага 2 нарушается — но лишь на пути порядка $l \ll d$; этим пренебрегаем.

4. Время пролёта одного шарика. На шарик с зарядом q_0 в канале действует сила $F_x = q_0\rho x/(3\varepsilon_0)$. Чтобы шарик втянуло внутрь, она должна быть направлена к центру при $x > 0$, то есть $q_0 < 0$: *шарик заряжен отрицательно*, $q_0 = -q$. Второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = -\frac{\rho q}{3\varepsilon_0}\,x,$$

это уравнение гармонических колебаний с циклической частотой $\omega = \sqrt{\rho q/(3\varepsilon_0 m)}$ и амплитудой R: $x = R\cos\omega t$. До противоположного конца канала ($x = -R$) шарик долетает за половину периода (рис. 4):

$$t_ш = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{3\varepsilon_0 m}{\rho q}} \quad \Rightarrow \quad t_ш^2 = \frac{3\pi^2\varepsilon_0 m}{\rho q}.$$

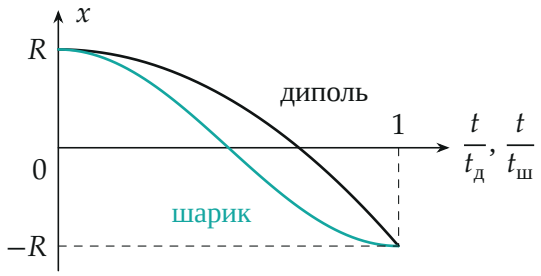

Рис. 4. Координата в долях своего времени пролёта: диполь — парабола $x = R(1 - 2t^2/t_д^2)$ (равноускоренно), шарик — косинус $x = R\cos(\pi t/t_ш)$ (полпериода колебаний).

5. Плечо диполя. Делим одно время на другое — неизвестные q, m,

ρ сокращаются:

$$\frac{t_д^2}{t_ш^2} = \frac{12\,\varepsilon_0 m\,d}{\rho q\,l} \cdot \frac{\rho q}{3\pi^2 \varepsilon_0 m} = \frac{4d}{\pi^2 l} \quad \Rightarrow \quad l = d\left(\frac{2\,t_ш}{\pi\,t_д}\right)^2.$$

Обратите внимание. Сила на диполь в однородном поле равна нулю, а здесь она есть: поле неоднородно, и разность $E_x(x_2) - E_x(x_1) = \rho l/(3\varepsilon_0)$ у линейного поля одна и та же всюду. Поэтому диполь не колеблется, а разгоняется на всём пути.

Проверка. Размерность: $l = d \cdot (\text{с}/\text{с})^2$ — метры. По условию $l \ll d$, значит, $t_д \gg t_ш$: сила на диполь в d/l раз меньше максимальной силы на шарик, и он движется медленнее — разумно. Пример: $l = d/100$ даёт $t_д = \frac{2}{\pi}\sqrt{d/l}\,t_ш \approx 6{,}4\,t_ш$.

Ответ. $l = d\left(\dfrac{2\,t_ш}{\pi\,t_д}\right)^2$; ближний к шару заряд диполя при старте положительный, заряд шарика во втором случае отрицательный.