Магнитная пружина

Задача 2. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 11 класс, задача 2] «Магнитная пружина».

Невесомый гибкий провод с током I образует замкнутую петлю длиной L, которая соприкасается с вертикальной стенкой и гранью куба массой m. Система находится в магнитном поле B, перпендикулярном плоскости рисунка. Исходно куб удерживают на расстоянии x_0 от стенки.

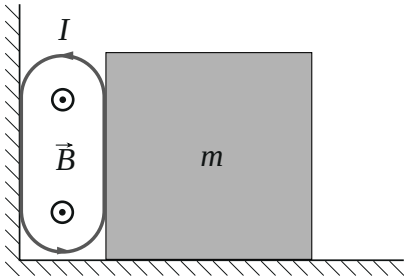

Рис. 1. Рисунок условия.

1. До какой наибольшей скорости v_m разгонится куб, если его отпустить?
2. Через какое время t_m будет достигнута эта скорость?

Примечание. Считайте, что при движении куба провод остаётся в одной вертикальной плоскости.

▲ **Решение. Что происходит.** Петля с током в магнитном поле стремится расшириться: сила Ампера на каждый её кусочек направлена наружу. Провод невесомый и гибкий, поэтому его форма определяется только равновесием сил Ампера и натяжения. Покажем, что свободные участки — полуокружности диаметра x, а участок, прижатый к грани куба, прямой и укорачивается при удалении куба. Сила на куб окажется линейной по смещению — как у пружины. Это задача на силу Ампера, второй закон Ньютона и гармонические колебания.

Обозначения. x — расстояние от стенки до грани куба, $l(x)$ — длина участка провода, прижатого к грани, T — натяжение провода, F — сила, с которой провод давит на куб.

1. Форма свободного участка. Провод невесомый, поэтому сумма сил на любой его кусочек равна нулю. Возьмём кусочек свободного участка длины Δl с радиусом кривизны r и углом поворота $\Delta\alpha$, $\Delta l = r\,\Delta\alpha$ (рис. 2). На него действуют натяжения T_1, T_2 по касательным на концах и сила Ампера $IB\,\Delta l$ по нормали (поле перпендикулярно проводу). Первый закон Ньютона в проекциях на касательную в середине кусочка и на нормаль:

$$T_1 \cos\frac{\Delta\alpha}{2} = T_2 \cos\frac{\Delta\alpha}{2}, \qquad (T_1 + T_2)\sin\frac{\Delta\alpha}{2} = IB\,r\,\Delta\alpha.$$

Из первого $T_1 = T_2 = T$: натяжение вдоль свободного участка одно и то же. Из второго при малом $\Delta\alpha$ ($\sin\frac{\Delta\alpha}{2} \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$): $T\,\Delta\alpha = IBr\,\Delta\alpha$, то есть

$$r = \frac{T}{IB} = \text{const}.$$

Свободный участок — дуга окружности. Излома у провода нет: на точку излома действовали бы два конечных натяжения под углом, а уравновесить их нечем — сила Ампера на кусочек длины $\Delta l \to 0$ стремится к нулю.

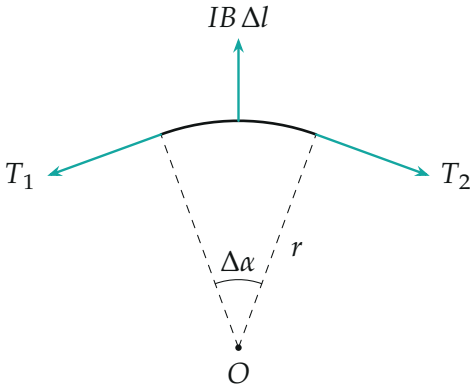

Рис. 2. Кусочек свободного участка провода: натяжения по касательным и сила Ампера по нормали наружу; длины стрелок по модулю, $IB\,\Delta l = 2T\sin(\Delta\alpha/2)$.

2. Форма петли и сила на куб. Свободных участка два: сверху и снизу. Каждый — дуга окружности, которая без излома переходит в прямой участок на стенке и в прямой участок на грани куба, то есть касается двух параллельных вертикалей на расстоянии x. Такая дуга — полуокружность диаметра x (рис. 3). Длина двух полуокружностей πx, на два прямых участка остаётся $L - \pi x$, и они равны (оба соединяют концы одинаковых полуокружностей):

$$l(x) = \frac{L - \pi x}{2}.$$

Сила на куб — это сила Ампера на прижатый к грани прямой участок: он давит на грань, перпендикулярную току. Натяжения на его концах направлены вертикально (вдоль провода) и горизонтальной составляющей не дают. Поэтому

$$F = IB\,l(x) = \frac{IB\,(L - \pi x)}{2},$$

направлена от стенки. Прямой участок исчезает при $l = 0$, то есть при $x = L/\pi$: петля становится окружностью, и провод перестаёт давить на куб. Разгон идёт на отрезке $x_0 \le x \le L/\pi$.

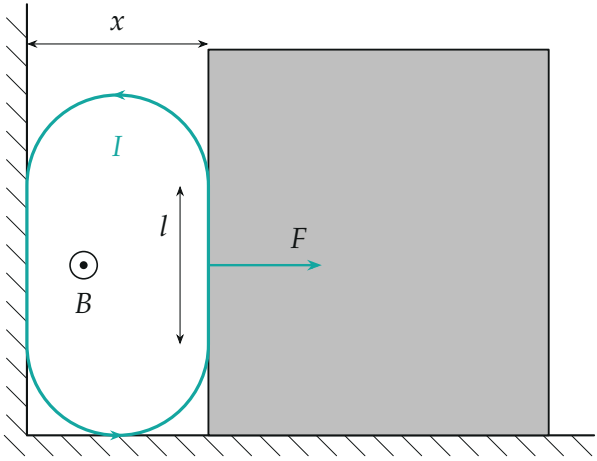

Рис. 3. Петля в любой момент: две полуокружности диаметра x и два пря-

мых участка длины $l = (L - \pi x)/2$. Сила $F = IBl$ толкает куб, пока $x < L/\pi$.

Пункт 1. Наибольшая скорость. Сила F направлена по движению и убывает до нуля при $x = L/\pi$, значит, куб разгоняется на всём отрезке $[x_0;\, L/\pi]$, а дальше провод его не касается — скорость максимальна при $x = L/\pi$. Трения нет (о нём ничего не сказано). Теорема об изменении кинетической энергии куба: работа силы F — площадь треугольника под графиком $F(x)$ (рис. 4):

$$\frac{mv_m^2}{2} = \frac{1}{2}F(x_0)\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi IB}{2}\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)\cdot\left(\frac{L}{\pi} - x_0\right),$$

где $F(x_0) = \dfrac{IB(L - \pi x_0)}{2} = \dfrac{\pi IB}{2}\left(\dfrac{L}{\pi} - x_0\right)$. Отсюда

$$v_m = \left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)\sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}.$$

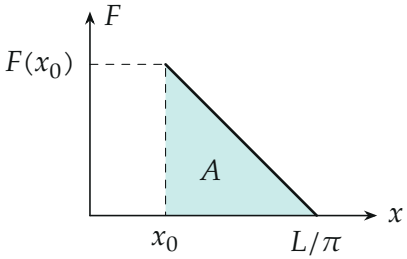

Рис. 4. Сила провода на куб линейно убывает с x; работа A — площадь треугольника.

Пункт 2. Время разгона. Введём смещение от точки $x = L/\pi$: $y = x - L/\pi$. Второй закон Ньютона для куба в проекции на ось x (от стенки):

$$m\ddot{x} = \frac{IB(L - \pi x)}{2} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\frac{\pi IB}{2}y.$$

Это уравнение гармонических колебаний «пружинного маятника» с

жёсткостью $k = \pi IB/2$ и

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}.$$

Куб стартует из покоя в крайнем положении $y = -y_0$, $y_0 = L/\pi - x_0$, и до «положения равновесия» $y = 0$ доходит за четверть периода (рис. 5):

$$t_m = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{\pi IB}} = \sqrt{\frac{\pi m}{2IB}}.$$

Заодно — второй способ для пункта 1: в положении равновесия скорость гармонических колебаний максимальна и равна ωy_0, то же, что из энергии. Дальше «пружина» не тянет назад — провод от грани отходит, и куб едет с постоянной скоростью v_m.

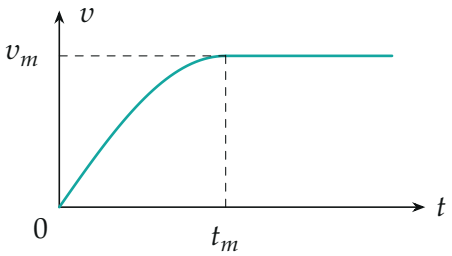

Рис. 5. Скорость куба: четверть синусоиды до t_m, затем постоянная.

Обратите внимание. Время разгона не зависит ни от x_0, ни от L — как период пружинного маятника не зависит от амплитуды. Это и есть «магнитная пружина»: недеформированная длина L/π, жёсткость $\pi IB/2$.

Проверка. Размерность: $[IB] = \text{А} \cdot \text{Тл} = \text{Н/м}$, поэтому $\sqrt{IB/m}$ — это с^{-1}, v_m — м/с, t_m — с. Предел: при $x_0 \to L/\pi$ петля уже почти окружность, прижатого участка нет, и $v_m \to 0$ — верно.

Ответ. 1) $v_m = \left(\frac{L}{\pi} - x_0\right)\sqrt{\frac{\pi IB}{2m}}$; 2) $t_m = \sqrt{\frac{\pi m}{2IB}}$.