# Падающая гантель

**Задача 4.** [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Падающая гантель».

Два одинаковых маленьких шарика, соединённых невесомым твёрдым стержнем длины $L$, падают на гладкую, абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Непосредственно перед ударом нижнего шарика о плоскость скорости шариков направлены вертикально вниз и равны $v_0$, а сразу после удара скорости шариков оказались взаимно перпендикулярны.

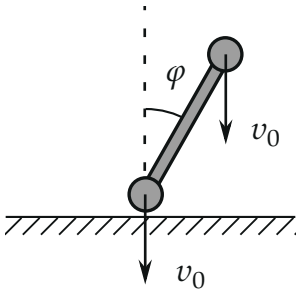


*Рис. 1. Рисунок условия: гантель перед ударом.*

1. Каковы величина скорости центра масс гантели $v_c$ и угловая скорость вращения стержня $\omega$ сразу после удара?
2. Под каким углом $\varphi$ к вертикали был наклонён стержень перед ударом?

▲ **Решение. Что происходит.** Удар мгновенный, за время удара на гантель действуют только сила реакции плоскости (вертикальная — плоскость гладкая) и сила тяжести, которой за время удара можно пренебречь. Поэтому горизонтальный импульс гантели сохраняется, а удар абсолютно упругий — сохраняется и кинетическая энергия. Скорость каждого шарика после удара — скорость центра масс плюс скорость вращения вокруг него; перпендикулярность скоростей шариков даёт простое условие на эти две скорости. Угол найдём из того, что верхний шарик получает удар только вдоль стержня. Задача на законы сохранения при ударе и сложение скоростей твёрдого тела.

**Обозначения.** $m$ — масса шарика, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ — скорости нижнего и верхнего шариков сразу после удара, $\vec{u}$ — скорость верхнего шарика относительно центра масс, $u = \omega L/2$; ось $y$ — вверх, ось $x$ — горизонтально в сторону верхнего шарика.

**Пункт 1.**

**1. Скорость центра масс направлена вертикально.** Закон сохранения проекции импульса гантели на ось $x$ за время удара: внешняя сила (реакция гладкой плоскости) вертикальна, до удара $p_x = 0$, значит, и после удара $v_{cx} = 0$. Скорость центра масс $\vec{v}_c$ вертикальна.

**2. Скорости шариков через $\vec{v}_c$ и $\vec{u}$.** Стержень твёрдый, центр масс — его середина. Относительно центра масс шарики вращаются со скоростями $\pm\vec{u}$, перпендикулярными стержню, $u = \omega L/2$:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{u}, \qquad \vec{v}_1 = \vec{v}_c - \vec{u}.$$

Условие перпендикулярности скоростей шариков:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (\vec{v}_c - \vec{u}) \cdot (\vec{v}_c + \vec{u}) = v_c^2 - u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_c = u.$$

Геометрически: $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — диагонали параллелограмма со сторонами $\vec{v}_c$ и $\vec{u}$; диагонали перпендикулярны только у ромба (рис. 2).

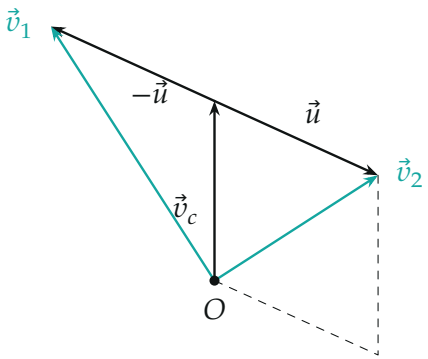


*Рис. 2. Сложение скоростей (векторы — в масштабе, по найденному ответу): $\vec{v}_2 = \vec{v}_c + \vec{u}$, $\vec{v}_1 = \vec{v}_c - \vec{u}$. Перпендикулярны они, только если $|\vec{u}| = |\vec{v}_c|$ — параллелограмм на $\vec{v}_c$ и $\vec{u}$ (пунктир) становится ромбом.*

**3. Энергия.** Закон сохранения кинетической энергии гантели при абсолютно упругом ударе:

$$2\cdot\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=\frac{m}{2}\Big(|\vec v_c-\vec u|^2+|\vec v_c+\vec u|^2\Big)=mv_c^2+mu^2.$$

(это теорема Кёнига: энергия центра масс плюс энергия вращения). С $v_c=u$:

$$v_0^2=2v_c^2\quad\Rightarrow\quad v_c=u=\frac{v_0}{\sqrt2},\qquad\omega=\frac{2u}{L}=\frac{\sqrt2\,v_0}{L}.$$

Пока неясно, вверх или вниз направлена $\vec v_c$, — это решит пункт 2.

**Пункт 2.**

**4. Верхний шарик получает удар только вдоль стержня.** На верхний шарик за время удара действует только сила со стороны стержня, а у невесомого стержня она направлена вдоль него. Значит, проекция импульса верхнего шарика на направление $\vec\tau$, перпендикулярное стержню, не меняется (рис. 3). Направим $\vec\tau$ вправо-вниз: $\vec\tau=(\cos\varphi;\,-\sin\varphi)$. До удара

$$v_{2\tau}^{\text{до}}=(0;\,-v_0)\cdot\vec\tau=v_0\sin\varphi.$$

После удара $\vec u$ перпендикулярна стержню, $\vec u=\pm u\vec\tau$, а $\vec v_c=(0;\,v_{cy})$:

$$v_{2\tau}^{\text{после}}=-v_{cy}\sin\varphi\pm u.$$

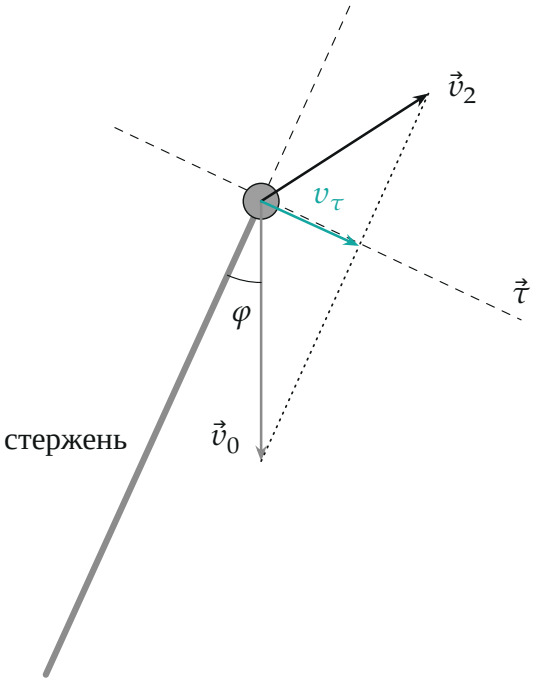


*Рис. 3. Верхний шарик: скорость до удара $\vec{v}_0$ (серая) и после $\vec{v}_2$. Их проекции на направление $\vec{\tau}$ поперёк стержня одинаковы: $v_\tau = v_0 \sin\varphi$ (бирюзовая стрелка): удар через стержень меняет только продольную составляющую.*

**5. Угол.** Приравниваем:

$$v_0 \sin\varphi = -v_{cy} \sin\varphi \pm u \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{\pm u}{v_0 + v_{cy}}.$$

Подставим $u = v_0/\sqrt{2}$. Если центр масс после удара летит вниз, $v_{cy} = -v_0/\sqrt{2}$, то $\sin\varphi = \dfrac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 > 1$ — невозможно. Значит, $v_{cy} = +v_0/\sqrt{2}$, центр масс отскакивает вверх, $\vec{u} = +u\vec{\tau}$, и

$$\sin\varphi = \frac{1/\sqrt{2}}{1 + 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1, \qquad \varphi = \arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 24{,}5°.$$

Знак $\vec{u} = +u\vec{\tau}$ означает: верхний шарик относительно центра масс уходит вправо-вниз, гантель после удара заваливается, угол с вертикалью растёт. Скорости шариков сразу после удара (рис. 4):

$$\vec{v}_1 \approx (-0{,}64;\ 1{,}00)\, v_0, \qquad \vec{v}_2 \approx (0{,}64;\ 0{,}41)\, v_0.$$

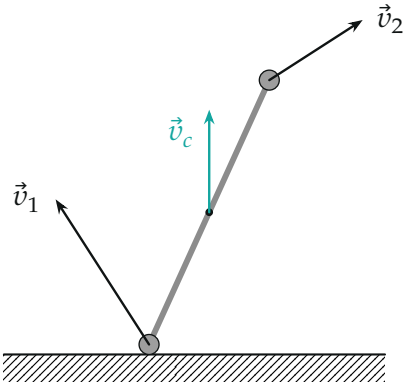


*Рис. 4. Сразу после удара (в масштабе): нижний шарик отскакивает с вертикальной составляющей $v_0$, скорости шариков перпендикулярны, центр масс летит вверх со скоростью $v_0/\sqrt{2}$.*

**Обратите внимание.** Скорость центра масс нельзя найти одним законом сохранения: импульс по вертикали меняется (плоскость бьёт), а энергия связывает $v_c$ с $\omega$. Нужна дополнительная информация — перпендикулярность скоростей, а для угла — то, что стержень передаёт удар только вдоль себя.

**Проверка.** Энергия: $v_1^2 + v_2^2 = (0{,}414 + 1) + (0{,}414 + 0{,}172) = 2{,}00$ в единицах $v_0^2$ — сохраняется. Перпендикулярность: $-0{,}64 \cdot 0{,}64 + 1{,}00 \cdot 0{,}41 = -0{,}414 + 0{,}414 = 0$. Стержень не растягивается: $(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\sin\varphi;\ \cos\varphi) = 1{,}29 \cdot 0{,}414 - 0{,}59 \cdot 0{,}910 = 0$. Численное решение задачи удара (импульс плоскости и стержня как неизвестные) на python даёт те же $\varphi = 24{,}47°$ и $v_c = 0{,}707\, v_0$.

**Ответ.** 1) $v_c = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$ (вертикально вверх), $\omega = \dfrac{\sqrt{2}\, v_0}{L}$; 2) $\varphi = \arcsin(\sqrt{2} - 1) \approx 24{,}5°$.