Прозрачный шарик

Задача 5. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Прозрачный шарик».

Лучи света, испускаемые точечным источником S, падают на однородный шар из прозрачного материала с показателем преломления n. Луч, вышедший из источника S под углом α к прямой MN, на которой лежат источник и центр шара, после двух преломлений на границе шара пересекает MN под углом β в точке K (см. рис.). Расстояние $SK = l$.

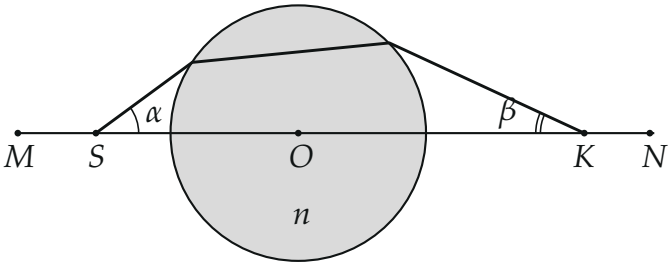

Рис. 1. Рисунок условия.

1. Определите расстояние SO от источника до центра шара и радиус R шара.
2. Вычислите SO и R для значений $n = 2$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $l = 10$ см.

▲ **Решение. Что происходит.** Луч входит в шар в точке B и выходит в точке C. Обе нормали — радиусы OB и OC, а треугольник OBC равнобедренный, поэтому ход луча симметричен: угол преломления при входе равен углу падения изнутри при выходе, и луч выходит под тем же углом к нормали, под каким вошёл. Отсюда два шага: теорема синусов в треугольниках SBO и OCK даёт SO, а полный угол поворота луча, равный $\alpha + \beta$, вместе с законом преломления даёт угол падения и R. Задача на закон преломления и геометрию хода луча.

Обозначения. B, C — точки входа и выхода луча, φ — угол падения в точке B, θ — угол преломления; A — точка пересечения продолжений лучей SB и CK; γ — угол поворота луча при одном преломлении.

1. Симметрия хода луча. Закон преломления в точке B: $\sin\varphi = n\sin\theta$. Треугольник OBC равнобедренный ($OB = OC = R$), его углы

при основании равны: луч BC составляет с нормалью OC тот же угол θ. Закон преломления в точке C: $n\sin\theta = \sin\varphi'$, значит, угол выхода $\varphi' = \varphi$ (рис. 2).

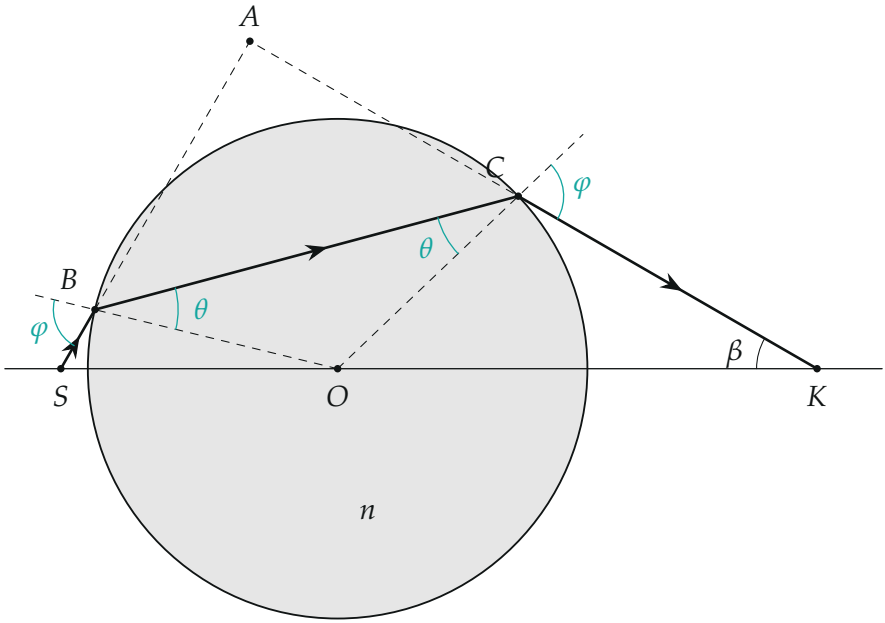

Рис. 2. Ход луча для $n = 2$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$ (построен по вычисленным точкам). Пунктир — нормали OB, OC и продолжения лучей до точки A. Углы с нормалями: снаружи φ, внутри θ — одинаковые при входе и выходе.

Пункт 1.

2. Расстояние SO**.** Теорема синусов в треугольнике SBO: угол при вершине S равен α, напротив него сторона $OB = R$; угол SBO смежный с углом падения φ (луч BS и внешняя нормаль составляют φ), его синус $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$, напротив него — сторона SO:

$$\frac{SO}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\alpha}.$$

Так же в треугольнике OCK: угол при K равен β, угол $OCK = \pi - \varphi$

(рис. 3):

$$\frac{OK}{\sin\varphi} = \frac{R}{\sin\beta}.$$

Делим одно на другое: $\dfrac{SO}{OK} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Точки S, O, K на одной прямой, $SO + OK = l$, поэтому

$$SO = \frac{l\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}.$$

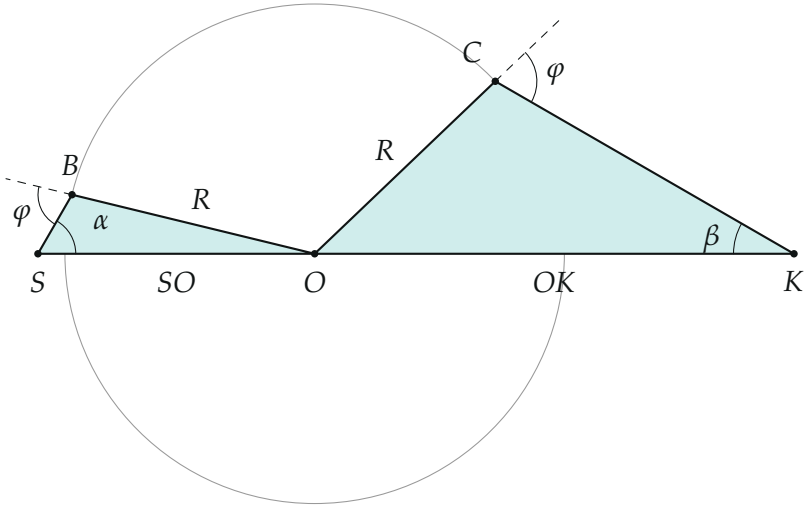

Рис. 3. Треугольники SBO и OCK: в каждом сторона R лежит напротив угла α (или β), а SO (или OK) — напротив угла $SBO = \pi - \varphi$ (или $OCK = \pi - \varphi$), смежного с углом падения φ (пунктир — продолжения радиусов).

3. Угол падения. При каждом преломлении луч поворачивается на угол $\gamma = \varphi - \theta$ (между падающим и преломлённым лучом), полный поворот — 2γ. Это угол между продолжением луча SB за точку A и лучом AK, то есть внешний угол треугольника SAK при вершине A, а внешний угол равен сумме двух несмежных с ним внутренних (рис. 4):

$$2\gamma = \alpha + \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad \theta = \varphi - \gamma.$$

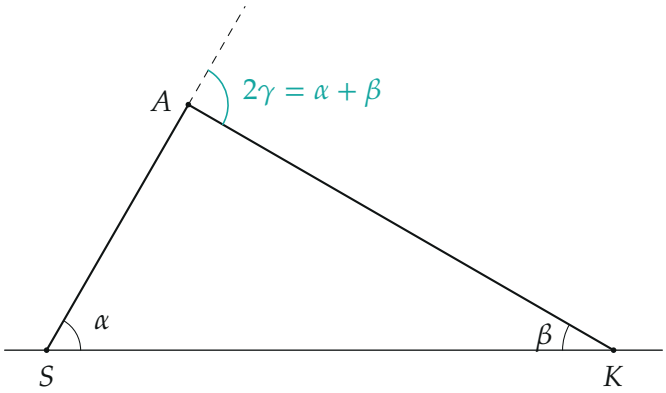

Рис. 4. Треугольник SAK, образованный лучом до шара и после. Полный поворот луча 2γ — внешний угол при вершине A, он равен $\alpha+\beta$.

Закон преломления в точке B:

$$\sin\varphi = n\sin(\varphi-\gamma) = n\sin\varphi\cos\gamma - n\cos\varphi\sin\gamma.$$

Делим на $\cos\varphi$: $\operatorname{tg}\varphi\,(n\cos\gamma-1) = n\sin\gamma$, откуда

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{n\sin\gamma}{n\cos\gamma-1},$$

$$\sin\varphi = \frac{n\sin\gamma}{\sqrt{(n\sin\gamma)^2+(n\cos\gamma-1)^2}} = \frac{n\sin\gamma}{\sqrt{n^2-2n\cos\gamma+1}}.$$

4. Радиус. Из теоремы синусов шага 2 $R = SO\,\dfrac{\sin\alpha}{\sin\varphi}$:

$$R = \frac{l\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}\cdot\frac{\sqrt{n^2-2n\cos\gamma+1}}{n\sin\gamma}, \qquad \gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пункт 2. Числа. $n=2$, $\alpha=60°$, $\beta=30°$, $\gamma=45°$, $l=10$ см:

$$SO = \frac{10\cdot 0{,}5}{0{,}866+0{,}5}\text{ см} \approx 3{,}66\text{ см};$$

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 0{,}707}{\sqrt{4-2{,}828}+1} = \frac{1{,}414}{1{,}474} \approx 0{,}960\ (\varphi \approx 73{,}7^\circ),$$

$$R = 3{,}66\cdot\frac{0{,}866}{0{,}960}\ \text{см} \approx 3{,}30\ \text{см}.$$

Обратите внимание. В шаге 2 неизвестный угол φ входит в обе теоремы синусов одинаково и сокращается — поэтому SO не зависит от n. А для R угол φ нужен, и его даёт только связка «поворот луча $= \alpha + \beta$» плюс закон преломления.

Проверка. Размерность: SO и R пропорциональны l. Трассировка луча на python (шар $R = 3{,}303$ см, источник на расстоянии 3,660 см, луч под 60°, $n = 2$) даёт выход к оси под углом 30,0° на расстоянии $SK = 10{,}00$ см — по этим точкам и построен рис. 2. Предел $n \to 1$: шара «нет», луч не поворачивается, и $\alpha + \beta \to 0$ — согласуется с $\gamma = \varphi - \theta \to 0$.

Ответ. 1) $SO = \dfrac{l\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$, $R = \dfrac{l\sin\alpha\sin\beta\sqrt{n^2 - 2n\cos\gamma + 1}}{(\sin\alpha + \sin\beta)\, n\sin\gamma}$, где $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 2) $SO \approx 3{,}66$ см, $R \approx 3{,}30$ см.