Плотность провода (III)

Задача 1. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 1] «Плотность провода (III)».

Вам выдан образец одножильного провода длиной $L = 600$ мм. На половине его длины изоляция срезана. Определите массу, объём и плотность ($m_м$, $V_м$, $\rho_м$) металла, а также массу, объём и плотность ($m_и$, $V_и$, $\rho_и$) изоляции провода.

В процессе решения поставленной задачи используйте провод в качестве рычага и исследуйте зависимость длины какой-либо части провода в положении равновесия от массы размещённого на нём груза. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной. Погрешность оценивать не требуется.

Примечание 1. Длина окружности $X = \pi D$, где D — диаметр этой окружности. Площадь круга $S = \pi D^2/4$; $\pi = 3{,}14$.

Примечание 2. Изгибать провод запрещено!

Примечание 3. Снимать изоляцию с проволоки категорически запрещено.

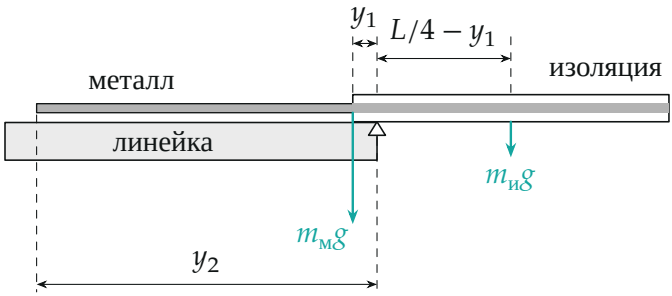
Оборудование: образец провода длиной $L = 600$ мм, линейка 40 см, 2 шприца объёмом 5 мл и 1 мл; стакан с водой, гибкая трубка, нитка, салфетка, миллиметровая бумага для построения графика.

▲ **Решение. Что происходит.** Весов нет, и это задача на правило моментов: провод — рычаг, а край линейки — опора. Металл тянется по всей длине провода, поэтому его центр тяжести — в середине провода; изоляция покрывает только одну половину, и её центр тяжести — в середине этой половины, на $L/4$ от середины провода. Положение равновесия на краю линейки даёт только *отношение* масс $\alpha = m_м/m_и$. Чтобы найти сами массы, нужен груз известной массы — вода в шприце (1 мл = 1 г). Объёмы находим вытеснением воды в гибкой трубке, плотности — делением.

Обозначения. $L = 600$ мм — длина провода; $m_м$, $m_и$ — массы металла и изоляции, $\alpha = m_м/m_и$; y_1, y_2, y_3 — расстояния до точки опоры (рисунки); m_0 — масса пустого шприца, $m_в$ — масса воды в нём; X — расстояние от середины провода до опоры при подвешенном шприце.

1. Отношение масс α. Кладём провод на край линейки и двигаем, пока он не уравновесится. Опора тогда — под общим центром тяжести, и

правило моментов относительно опоры: момент силы тяжести металла равен моменту силы тяжести изоляции.



Положение 1: центр тяжести металла — в середине провода, изоляции — на $L/4$ правее; опора между ними

В положении 1 (рисунок) плечо силы $m_м g$ равно y_1, плечо $m_и g$ равно $L/4 - y_1$:

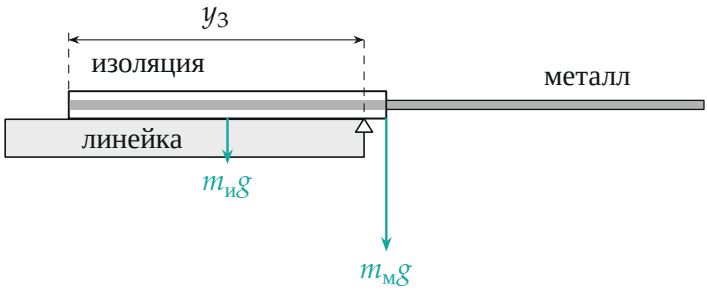
$$m_м y_1 = m_и\left(\frac{L}{4} - y_1\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{L}{4y_1} - 1.$$

То же положение, но расстояние y_2 отсчитано от голого конца: середина провода на $L/2$ от него, центр изоляции — на $3L/4$:

$$m_м\left(y_2 - \frac{L}{2}\right) = m_и\left(\frac{3L}{4} - y_2\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\frac{3}{4}L - y_2}{y_2 - \frac{L}{2}}.$$

Переворачиваем провод изоляцией на линейку (положение 2) и меряем y_3 от изолированного конца: центр изоляции на $L/4$ от него, середина провода — на $L/2$:

$$m_м\left(\frac{L}{2} - y_3\right) = m_и\left(y_3 - \frac{L}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha_3 = \frac{y_3 - \frac{L}{4}}{\frac{L}{2} - y_3}.$$



Положение 2: провод перевёрнут, опора под изоляцией

Измерено $y_1 = 22$ мм, $y_2 = 323$ мм, $y_3 = 279$ мм:

$$\alpha_1 = \frac{600}{4 \cdot 22} - 1 = 5{,}82, \qquad \alpha_2 = \frac{450 - 323}{323 - 300} = 5{,}52,$$
$$\alpha_3 = \frac{279 - 150}{300 - 279} = 6{,}14, \qquad \alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{3} = 5{,}83.$$

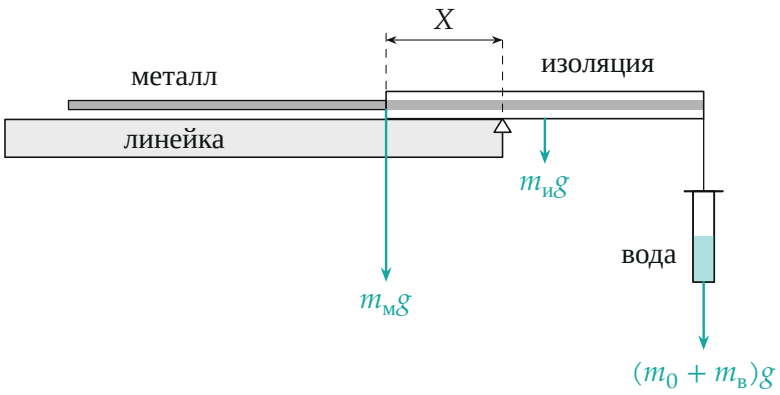
Разброс в ± 5 % понятен: опору видно с точностью около миллиметра, а плечо $y_2 - L/2$ всего 23 мм. Поэтому усредняем три значения.

2. Массы: шприц с водой как известный груз. Подвешиваем на нитке шприц к изолированному концу (рисунок) и снова уравновешиваем провод. Сила тяжести шприца $(m_0 + m_в)g$ приложена на $L/2$ от середины провода, опора — на расстоянии X от середины. Правило моментов относительно опоры:

$$m_м X = m_и\left(\frac{L}{4} - X\right) + (m_0 + m_в)\left(\frac{L}{2} - X\right),$$

откуда

$$\frac{4X}{L} = \frac{m_и + 2m_0 + 2m_в}{m_м + m_и + m_0 + m_в}.$$



Шприц с водой на изолированном конце: опора уходит к нему, X растёт с массой воды

Зависимость $X(m_в)$ нелинейная: $m_в$ стоит и в числителе, и в знаменателе. Линеаризуем: вычтем обе части из 2 — в числителе останется величина без $m_в$:

$$2 - \frac{4X}{L} = \frac{2m_м + m_и}{m_м + m_и + m_0 + m_в},$$

и обратная величина

$$Z \equiv \frac{1}{2 - 4X/L} = \frac{m_м + m_и + m_0}{2m_м + m_и} + \frac{m_в}{2m_м + m_и}.$$

Z — линейная функция $m_в$ с наклоном $k = 1/(2m_м + m_и) = 1/(m_и(2\alpha + 1))$. Набираем шприцем 5 мл по 1 мл воды (1 г каждый):

$m_в$, г	0	1	2	3	4	5
X, мм	80	92	100	110	119	127
Z	0,682	0,721	0,750	0,789	0,829	0,867

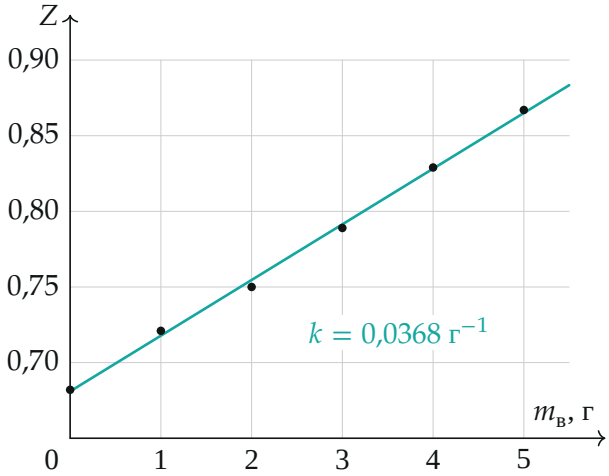


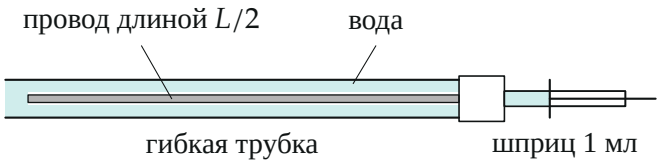
График $Z(m_в)$ — прямая; наклон по методу наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (python): $k = 0{,}0368$ г$^{-1}$, отрезок на оси $b = 0{,}681$. Отсюда

$$m_и = \frac{1}{k(2\alpha + 1)} = \frac{1}{0{,}0368 \cdot 12{,}66} = 2{,}15 \text{ г}, \qquad m_м = \alpha m_и = 12{,}5 \text{ г}.$$

Отрезок b даёт ещё и массу шприца: $m_0 = b/k - m_м - m_и = 3{,}8$ г — правдоподобно для шприца на 5 мл; это проверка, что модель рычага верна.

3. Объёмы — вытеснением воды в трубке. Диаметры прокаткой по линейке меряются плохо (провод длинный, проскальзывает), поэтому меряем объёмы прямо. Надеваем гибкую трубку на шприц на 1 мл и находим объём воды, заполняющей трубку: пустую ($V_т$), с вставленной голой половиной провода длиной $L/2$ ($V_{тм}$) и с изолированной половиной ($V_{ти}$). Провод вытесняет ровно свой объём.



Объём воды в трубке с проводом меньше, чем в пустой, ровно на объём провода

Измерено $V_т = 2{,}65$ см^3, $V_{тм} = 1{,}92$ см^3, $V_{ти} = 0{,}37$ см^3. Голая половина вытесняет $V_т - V_{тм}$, а металл идёт по всей длине:

$$V_м = 2(V_т - V_{тм}) = 2 \cdot 0{,}73 = 1{,}46 \text{ см}^3.$$

Изолированная половина вытесняет свой внешний объём $V_{и\,вн} = V_т - V_{ти} = 2{,}28$ см^3, а внутри неё — половина металла:

$$V_и = V_{и\,вн} - \frac{V_м}{2} = 2{,}28 - 0{,}73 = 1{,}55 \text{ см}^3.$$

4. Плотности.

$$\rho_м = \frac{m_м}{V_м} = \frac{12{,}5}{1{,}46} = 8{,}6 \text{ г/см}^3, \qquad \rho_и = \frac{m_и}{V_и} = \frac{2{,}15}{1{,}55} = 1{,}39 \text{ г/см}^3.$$

Обратите внимание: центр тяжести металла — в середине *всего* провода, а не голой половины: металл есть и под изоляцией. Поэтому и в объёме изоляции вычитаем половину объёма металла.

Проверка. Размерности: α безразмерна, k — в г$^{-1}$, $1/(k(2\alpha+1))$ — в граммах. Предел: без изоляции ($m_и \to 0$) центр тяжести — в середине, $y_1 \to 0$, $\alpha \to \infty$, как и даёт $\alpha_1 = L/(4y_1) - 1$. Плотность металла 8,6 г/см^3 близка к меди (8,9 г/см^3), изоляции 1,4 г/см^3 — к поливинилхлориду. У организаторов по графику на глаз $m_м = 12{,}44$ г, $m_и = 2{,}14$ г, $\rho_м = 8{,}52$ г/см^3, $\rho_и = 1{,}38$ г/см^3 — расхождение меньше 1 %, это точность проведения прямой; прямое взвешивание у них дало 12,57 и 2,09 г.

Смысл: одной линейки и шприца хватает, чтобы взвесить провод — известная масса воды «калибрует» рычаг.

Ответ. $m_м \approx 12{,}5$ г, $V_м = 1{,}46$ см^3, $\rho_м \approx 8{,}6$ г/см^3; $m_и \approx 2{,}15$ г, $V_и = 1{,}55$ см^3, $\rho_и \approx 1{,}39$ г/см^3 (по данным организаторов).