Серый ящик – магазин

Задача 2. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, практический тур, задача 2] «Серый ящик – магазин».

С помощью серого ящика, содержащего источник напряжения U_0 и «магазин» сопротивлений (набор пяти резисторов, включённых последовательно) (рис. 1), определите величины внутренних сопротивлений R_{A1}, R_{A2} и R_{A3} мультиметра, используемого в качестве амперметра в диапазонах 200 мА, 20 мА и 2000 мкА. Для выполнения задания исследуйте зависимость силы тока через амперметр от величины сопротивления в цепи его включения. Выведите формулу, связывающую измеренные вами физические величины между собой. Постройте график полученной зависимости в координатах, в которых эта зависимость является линейной.

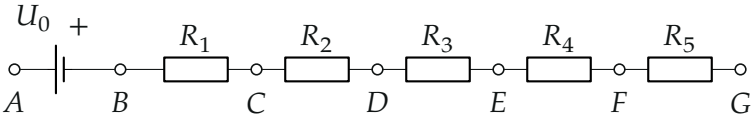

Рис. 1. Схема серого ящика

Оборудование: серый ящик; мультиметр; два провода штекер-крокодил, два провода крокодил-крокодил, миллиметровая бумага для построения графиков (3 листа формата А5).

Примечания: 1. Мультиметр в режиме амперметра разрешается подключать только (строго!!) к контактам B и C серого ящика. 2. Пользоваться другими режимами мультиметра можно. 3. Тщательно продумывайте последовательность своих действий и подробно описывайте их. В случае сжигания предохранителя, находящегося внутри мультиметра, его замена на исправный производиться не будет. 4. Источник напряжения считайте идеальным. 5. Если зависимость какой-либо физической величины Y от другой величины X представляет собой дробь, в числителе которой имеется только одно слагаемое, а в знаменателе несколько слагаемых, то анализ этой зависимости существенно упрощается, если перейти к равенству обратных величин левой и правой части уравнения.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на законы постоянного тока (делитель тока). Амперметр разрешено ставить только между B и C, то

есть параллельно резистору R_1. Тогда ток от источника делится между R_1 и амперметром, и доля, ушедшая в амперметр, зависит от его сопротивления R_A: чем больше R_A, тем меньше доля. Меняя сопротивление R_x остальной цепи (замыкаем A на разные контакты), снимаем $I(R_x)$; величина $1/I$ линейна по R_x, и наклон прямой даёт R_A. Подключение «параллельно R_1» ещё и бережёт прибор: даже на пределе 2 мА через него идёт лишь малая доля тока.

Обозначения. U_0 — напряжение источника; $R_1, \ldots, R_5$ — резисторы магазина; R_A — сопротивление амперметра; R_x — сопротивление участка от C до A (резисторы, через которые замкнута цепь); I — показание амперметра, I_0 — ток источника.

1. Предварительные измерения. Омметром между соседними контактами: $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = 10$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $R_4 = 40$ Ом, $R_5 = 80$ Ом. Вольтметром между A и B: $U_0 = 1{,}55$ В (вольтметр почти не берёт тока, так что это ЭДС).

2. Схема включения. Амперметр — к B и C, контакт A проводом — к одному из D–G; перемычками между контактами магазина закорачиваем лишние резисторы и получаем разные R_x.

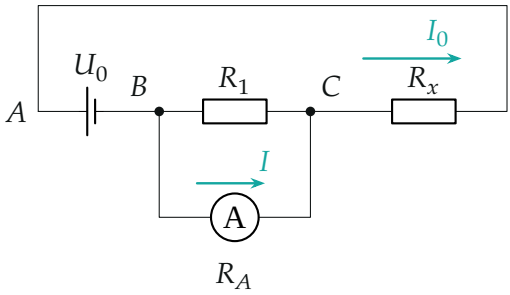

Рис. 2. Амперметр R_A параллельно R_1, последовательно с ними — R_x

3. Формула. Амперметр и R_1 соединены параллельно, их общее сопротивление $R_1R_A/(R_1 + R_A)$; последовательно с ними — R_x. Закон Ома для всей цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_x + \dfrac{R_1R_A}{R_1 + R_A}}.$$

Напряжение на параллельном участке общее, поэтому ток делится обратно сопротивлениям: в амперметр идёт доля $R_1/(R_1 + R_A)$:

$$I = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_A} = \frac{U_0 R_1}{R_x R_1 + R_x R_A + R_1 R_A}.$$

В числителе одно слагаемое, в знаменателе три — по примечанию 5 переходим к обратным величинам:

$$\frac{1}{I} = \frac{R_1 + R_A}{U_0 R_1} R_x + \frac{R_A}{U_0}.$$

Это прямая в координатах $(R_x,\ 1/I)$ с наклоном $k = (R_1 + R_A)/(U_0 R_1)$, откуда

$$R_A = k U_0 R_1 - R_1.$$

4. Измерения на пределе 20 мА.

R_x, Ом	150	130	110	90	80	70	50
I, мА	3,35	3,88	4,60	5,52	6,18	7,11	9,77
$1/I$, А^{-1}	299	258	217	181	162	141	102

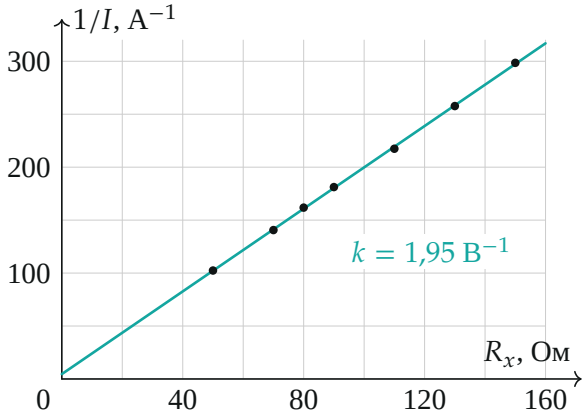

Рис. 3. $1/I$ от R_x на пределе 20 мА: точки на прямой, наклон — методом наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (python): $k = 1{,}95\ \text{В}^{-1}$ (у организаторов по графику $1{,}94\ \text{В}^{-1}$). Тогда

$$R_{A2} = kU_0R_1 - R_1 = 1{,}95 \cdot 1{,}55 \cdot 5 - 5 = 10{,}1\ \text{Ом} \approx 10\ \text{Ом}.$$

Обратите внимание: R_A находим по наклону, а не по отрезку R_A/U_0 на оси $1/I$. Отрезок около $5\ \text{А}^{-1}$ при значениях до $300\ \text{А}^{-1}$ — в пределах толщины линии; из него вышло бы 7 Ом вместо 10.

5. Пределы 2000 мкА и 200 мА. Тот же делитель годится для всех пределов, потому что доля тока в амперметре $R_1/(R_1 + R_A)$ сама подстраивается под предел: чем чувствительнее диапазон, тем больше R_A и меньше доля.

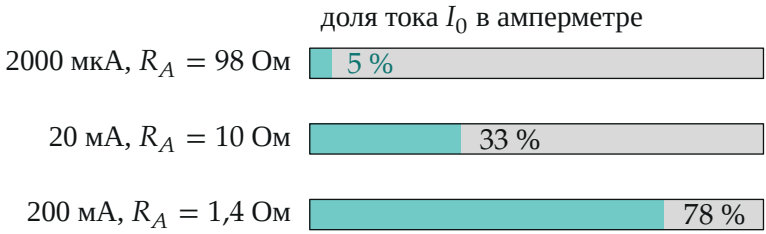

Рис. 4. Какая часть тока источника идёт через амперметр на разных пределах ($R_1 = 5$ Ом)

Сняв так же по семь точек и построив прямые $1/I(R_x)$, организаторы получили на пределе 2000 мкА $R_{A3} = 98$ Ом, на пределе 200 мА $R_{A1} = 1{,}4$ Ом. Проверим, что прибор не сгорит: на 2000 мкА при самом малом $R_x = 50$ Ом

$$I = \frac{1{,}55 \cdot 5}{50 \cdot 5 + 50 \cdot 98 + 5 \cdot 98}\ \text{А} = 1{,}4\ \text{мА} < 2\ \text{мА},$$

а включённый последовательно с магазином амперметр получил бы около $1{,}55/(155 + 98)\ \text{А} \approx 6$ мА — втрое больше предела. На 200 мА сопротивление амперметра сравнимо с внутренним сопротивлением батарейки (около 0,5 Ом), и считать источник идеальным уже грубо — это предел точности для R_{A1}.

Проверка. Размерность: k — Ом/(В·Ом) = В^{-1}, kU_0R_1 — Ом. Пределы: идеальный амперметр $R_A \to 0$ даёт $1/I = R_x/U_0$ — весь ток через амперметр, закон Ома для R_x; при $R_A \to \infty$ ток $I \to 0$. Второй способ для 20 мА — по двум крайним точкам: $k = (299 - 102)/(150 - 50) = 1{,}97\ \text{В}^{-1}$, $R_A = 10{,}3$ Ом. Сопротивления растут примерно вдесятеро при переходе к пределу в десять раз меньше — так устроены шунты мультиметра (напряжение на приборе при полном отклонении одинаково, 0,2–0,3 В).

Смысл: амперметр, включённый параллельно известному резистору, сам «рассказывает» о своём сопротивлении через то, какую часть тока он отбирает.

Ответ. $\dfrac{1}{I} = \dfrac{R_1 + R_A}{U_0 R_1} R_x + \dfrac{R_A}{U_0}$; $R_{A1} \approx 1{,}4$ Ом (200 мА), $R_{A2} \approx 10$ Ом (20 мА), $R_{A3} \approx 98$ Ом (2000 мкА).