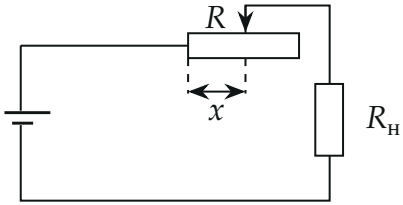
Термостат

Задача 1. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Термостат».

В термостате поддерживается постоянная температура, которая выше температуры окружающей среды. Это осуществляется с помощью нагревательного элемента, работающего в составе цепи (см. рис.). В этой цепи источник можно считать идеальным, сопротивление нагревательного элемента $R_н$ в 4 раза меньше полного сопротивления реостата R, а x — доля длины реостата, включённая в данный момент в цепь.



При температуре внешней среды $t_1 = 25\,^\circ\text{C}$ для поддержания требуемой температуры ползунок реостата стоит в положении $x_1 = 0{,}65$, при $t_2 = 20\,^\circ\text{C}$ ползунок реостата стоит в положении $x_2 = 0{,}35$. Какой должна быть величина x при температуре внешней среды $t_3 = 13\,^\circ\text{C}$? Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур термостата и окружающей среды.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на тепловой баланс и мощность в цепи постоянного тока. Температура термостата t_0 постоянна — значит, сколько тепла нагреватель выделяет за секунду, столько же уходит наружу. Чем холоднее снаружи, тем больше потери, тем больше нужна мощность нагревателя — и тем меньшую часть реостата надо оставить в цепи. Неизвестна и сама t_0, и коэффициент потерь, и напряжение источника; два известных режима позволяют найти t_0, а отношения мощностей снимают остальное.

Обозначения. U — напряжение источника; I — ток; P — мощность нагревателя; β — коэффициент тепловых потерь (мощность потерь $\beta(t_0 - t)$); t_0 — температура термостата.

1. Мощность нагревателя. Включённая часть реостата имеет сопротивление xR (сопротивление пропорционально длине), она соединена с нагревателем последовательно (рис. 2). Закон Ома для полной цепи с идеальным источником:

$$I = \frac{U}{xR + R_н} = \frac{U}{R\,(x + 0{,}25)}.$$

Закон Джоуля — Ленца для нагревателя:

$$P = I^2 R_н = \frac{U^2}{R} \cdot \frac{0{,}25}{(x + 0{,}25)^2}.$$

Чем меньше x, тем больше ток и мощность (рис. 4).

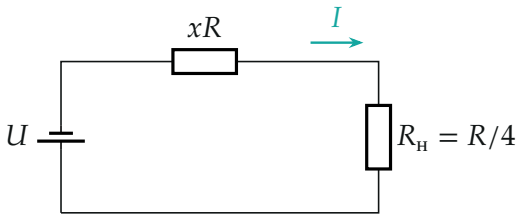


Рис. 2. Эквивалентная схема: в цепь включена часть реостата xR, последовательно с нагревателем; ток I общий.

2. Тепловой баланс. Температура термостата не меняется — его внутренняя энергия постоянна, и по закону сохранения энергии мощность нагревателя равна мощности потерь (рис. 3):

$$\frac{U^2}{R} \cdot \frac{0{,}25}{(x + 0{,}25)^2} = \beta\,(t_0 - t).$$

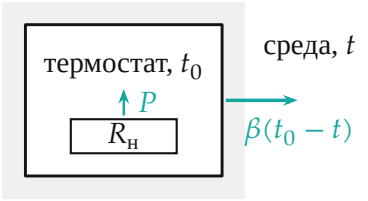


Рис. 3. Тепловой баланс: нагреватель отдаёт мощность P, через стенки уходит $\beta(t_0 - t)$; при постоянной t_0 они равны.

3. Температура термостата из двух режимов. $(x_1 + 0{,}25)^2 = 0{,}81$, $(x_2 + 0{,}25)^2 = 0{,}36$. Делим уравнение баланса для второго режима на первое — U, R, β сокращаются:

$$\frac{0{,}81}{0{,}36} = \frac{t_0 - 20}{t_0 - 25} \;\Rightarrow\; 2{,}25\,(t_0 - 25) = t_0 - 20 \;\Rightarrow\; t_0 = \frac{56{,}25 - 20}{1{,}25} = 29\,^\circ\text{C}.$$

4. Положение ползунка при $13\,^\circ$**C.** Делим уравнение баланса для третьего режима на первое:

$$\frac{0{,}81}{(x_3 + 0{,}25)^2} = \frac{29 - 13}{29 - 25} = 4 \;\Rightarrow\; (x_3 + 0{,}25)^2 = 0{,}2025,$$

$$x_3 + 0{,}25 = 0{,}45, \quad x_3 = 0{,}2.$$

Отрицательный корень $x_3 + 0{,}25 = -0{,}45$ отбрасываем: x — доля длины, $0 \le x \le 1$.

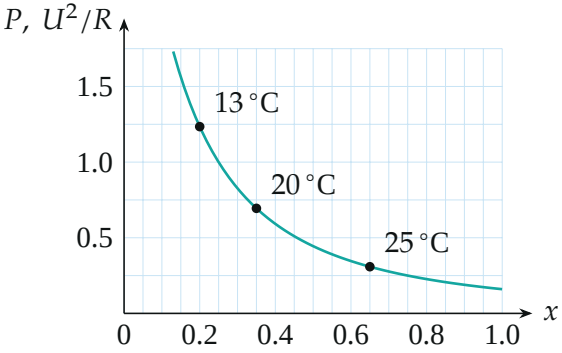


Рис. 4. Мощность нагревателя в зависимости от положения ползунка (в единицах U^2/R). Точки — три режима; подписи — температура среды.

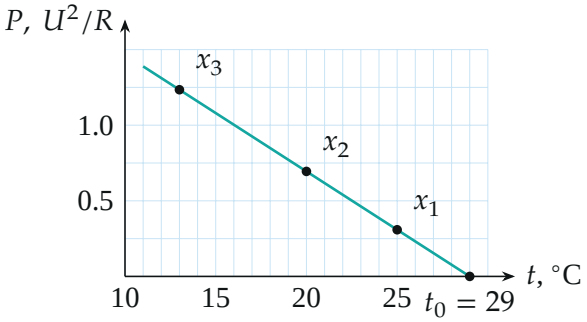


Рис. 5. Мощность потерь $\beta(t_0 - t)$ — прямая, обращающаяся в ноль при $t = t_0$. Две известные точки (x_1, x_2) задают прямую, и продолжение даёт мощность при 13 °C.

Обратите внимание. t_0 в условии не дана — её приходится найти из двух режимов. Ошибка — взять потери пропорциональными самой температуре среды, а не разности.

Соберём ответ.

$$x_3 = (x_1 + 0{,}25)\sqrt{\frac{t_0 - t_1}{t_0 - t_3}} - 0{,}25 = 0{,}9 \cdot \sqrt{\frac{4}{16}} - 0{,}25 = 0{,}2, \qquad t_0 = 29\,^\circ\text{C}.$$

Проверка. Подставим во второй режим: $0{,}81/(0{,}35 + 0{,}25)^2 = 2{,}25$, а $(29 - 20)/(29 - 25) = 2{,}25$ — сходится. Смысл: при 13 °C потери вчетверо больше, чем при 25 °C, — ток должен вырасти вдвое, полное сопротивление уменьшиться вдвое: $0{,}9R \to 0{,}45R$. Знак верный: холоднее — ползунок ближе к началу, $x_3 < x_2 < x_1$.

Термостат — это равенство двух мощностей; реостат подбирает ток так, чтобы мощность нагревателя догнала потери.

Ответ. $x_3 = 0{,}2$ (температура термостата $t_0 = 29\,^\circ\text{C}$).