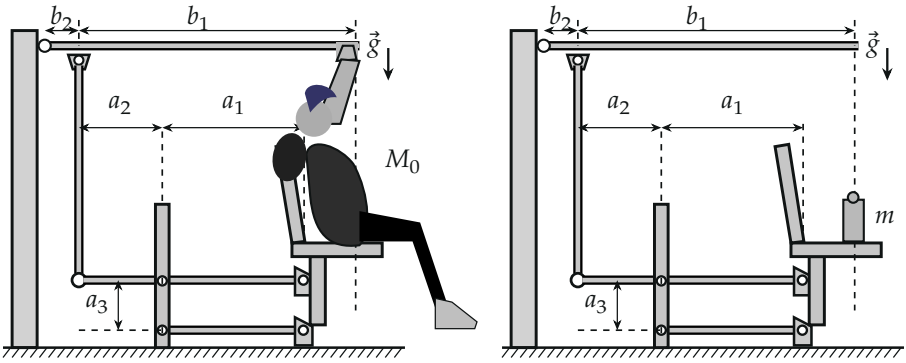
Силовой тренажёр

Задача 2. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, задача 2] «Силовой тренажёр».

На спортивной площадке установлен тренажёр, схема которого показана на рисунке. Спортсмен, сидя на кресле, поднимает сам себя, прикладывая к верхнему рычагу некоторую силу F. Система рычагов и шарниров обеспечивает плоскопараллельное перемещение кресла. При отсутствии спортсмена для уравновешивания тренажёра (верхний рычаг принимает горизонтальное положение) на кресло необходимо поместить груз $m = 3{,}7$ кг.



Какую вертикальную силу F должен прикладывать к рычагу человек массой $M_0 = 86$ кг для того, чтобы, сидя в кресле (не касаясь земли), удерживать рычаг в горизонтальном положении?

Длины рычагов, которые могут потребоваться при расчётах: $a_1 = 27{,}5$ см; $a_2 = 13{,}0$ см; $a_3 = 17{,}5$ см; $b_1 = 73{,}5$ см; $b_2 = 8{,}5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равновесие системы рычагов (правило моментов). Человек тянет верхний рычаг вниз, рычаг толкает вниз вертикальную штангу, та поворачивает среднюю штангу вокруг шарнира O на стойке, и её правый конец поднимает кресло. Сам человек при этом тоже участвует: рычаг тянет его руки вверх с силой F, и на кресло он давит меньше, чем весит. Средняя и нижняя штанги с

креслом образуют параллелограмм — кресло перемещается не поворачиваясь, и где именно сидит человек, неважно. Масса рычагов учитывается через груз m.

Обозначения. C — шарнир верхнего рычага на стене; O — шарнир средней штанги на стойке; T — сила, с которой вертикальная штанга действует на рычаги (она сжата); N — вертикальная сила, с которой кресло давит на конец средней штанги.

1. Масса рычагов. Рычаги и штанги весят. Без человека их вес уравновешивает груз m на кресле, когда верхний рычаг горизонтален. Все условия равновесия линейны по силам, поэтому вклад веса рычагов можно заменить так: рычаги считаем невесомыми, а из нагрузки на кресло вычитаем mg — груз m ровно «съедает» их моменты.

2. Кресло и параллелограмм. Нижняя штанга шарнирно закреплена с обоих концов и других сил на неё не действует (вес не учитываем, шаг 1) — она может тянуть или толкать только вдоль себя, горизонтально. Значит, вся вертикальная нагрузка кресла передаётся на правый конец средней штанги, а момент кресла уравновешивают две горизонтальные силы H в верхнем и нижнем шарнирах кресла — пара сил с плечом a_3 (рис. 2). Поэтому положение человека на кресле на ответ не влияет.

Условие равновесия «человек + кресло» по вертикали (второй закон Ньютона в проекции на вертикаль, ускорение нулевое): на человека действуют сила тяжести $M_0 g$ вниз и сила рычага F вверх (рычаг давит на руки с той же силой, с какой руки давят на рычаг, — третий закон Ньютона). С поправкой шага 1

$$N = (M_0 - m)\, g - F.$$

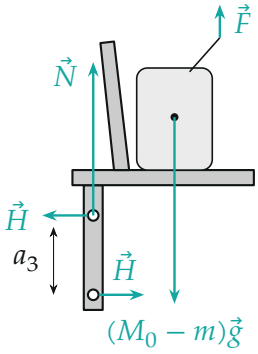


Рис. 2. Силы на «человека с креслом» (рычаги невесомы, вес уменьшен на mg): N — вертикальная сила средней штанги, F — сила рычага на руки, пара горизонтальных сил H — от средней и нижней штанг. Длины N, F и веса — по найденным значениям.

3. Верхний рычаг. Правило моментов относительно шарнира C: сила F на плече $b_1 + b_2$ поворачивает рычаг вниз, сила T со стороны штанги на плече b_2 — вверх (рис. 3):

$$Tb_2 = F\,(b_1 + b_2) \;\Rightarrow\; T = F\,\frac{b_1 + b_2}{b_2} = 9{,}65\,F.$$

Короткое плечо b_2 — штанга давит почти в 10 раз сильнее, чем человек тянет.

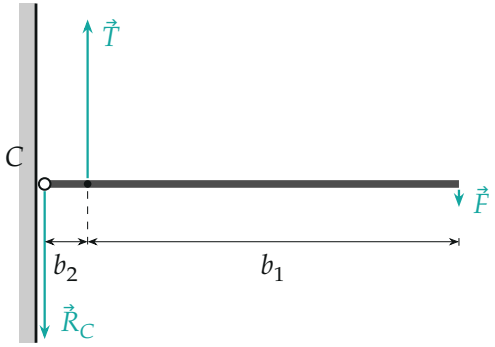


Рис. 3. Верхний рычаг: сила человека F на конце, сила штанги T на расстоянии b_2 от шарнира C, реакция шарнира $R_C = T - F$. Длины стрелок в одном масштабе.

4. Средняя штанга. Правило моментов относительно шарнира O: штанга давит на левый конец вниз с силой T на плече a_2, кресло — на правый конец вниз с силой N на плече a_1 (рис. 4):

$$Ta_2 = Na_1.$$

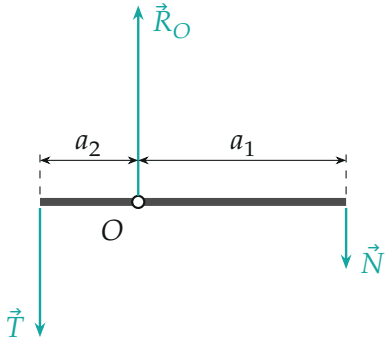


Рис. 4. Средняя штанга: вертикальная штанга давит на левый конец с силой T, кресло на правый — с силой N, шарнир O держит их сумму. T больше N в $a_1/a_2 = 2{,}1$ раза.

5. Решаем систему. Подставляем T из шага 3 и N из шага 2:

$$F\,\frac{b_1 + b_2}{b_2}\,a_2 = [(M_0 - m)g - F]a_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; F = \frac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2(b_1 + b_2)}\,(M_0 - m)\,g.$$

Числа: $a_1 b_2 = 27{,}5 \cdot 8{,}5 = 233{,}75$ см^2, $a_2(b_1 + b_2) = 13 \cdot 82 = 1066$ см^2,

$$F = \frac{233{,}75}{1299{,}75} \cdot 82{,}3 \cdot 10\ \text{Н} = 0{,}180 \cdot 823\ \text{Н} \approx 148\ \text{Н}.$$

Тогда $T = 9{,}65 \cdot 148 = 1428$ Н, $N = 823 - 148 = 675$ Н.

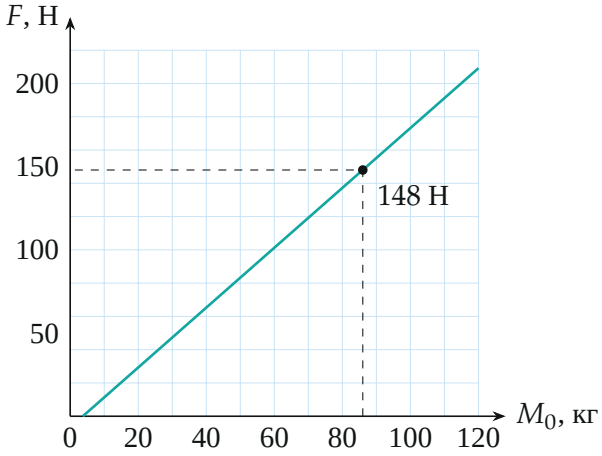


Рис. 5. Нужная сила в зависимости от массы спортсмена: $F = 1{,}80\,(M_0 - m)$ Н/кг, прямая начинается с $M_0 = m = 3{,}7$ кг.

Обратите внимание. Сила F входит в задачу дважды: она поворачивает рычаг и одновременно разгружает кресло (рычаг тянет руки человека вверх). Если забыть второе, выйдет $F = \dfrac{a_1 b_2}{a_2(b_1 + b_2)}(M_0 - m)g = 180$ Н.

Соберём ответ.

$$F = \frac{a_1 b_2\,(M_0 - m)\,g}{a_1 b_2 + a_2(b_1 + b_2)} \approx 148 \text{ Н}.$$

Проверка. Размерность: $\text{см}^2/\text{см}^2 \cdot \text{Н}$ — ньютоны. Моменты на средней штанге: $Ta_2 = 1428 \cdot 13 = 18\,560$ Н·см, $Na_1 = 675 \cdot 27{,}5 = 18\,560$ Н·см — сходится. Предел $b_2 \to 0$ (штанга у самой оси): $F \to 0$ — выигрыш в силе бесконечный, верно. Предел $M_0 = m$: $F = 0$ — тренажёр уравновешен без усилий.

Рычаги дают выигрыш почти в 6 раз: человек массой 86 кг держит себя силой, как если бы поднимал 15 кг.

Ответ. $F = \dfrac{a_1 b_2}{a_1 b_2 + a_2(b_1 + b_2)}\,(M_0 - m)\,g \approx 148$ Н.