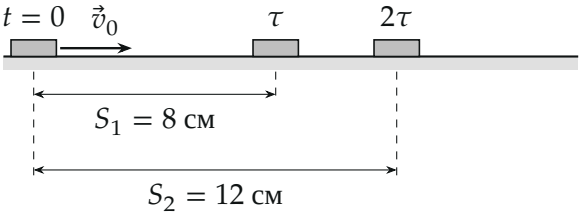
Торможение шайбы

Задача 3. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, задача 3] «Торможение шайбы».

Шайбу толкнули по горизонтальной поверхности. Через время $\tau = 0{,}1$ с она оказалась на расстоянии $S_1 = 8$ см от начальной точки, а через 2τ — на расстоянии $S_2 = 12$ см. Найдите значения коэффициента трения μ между шайбой и поверхностью, при которых это возможно. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.



Поясняющий рисунок: положения шайбы в моменты 0, τ, 2τ (в масштабе).

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на равнозамедленное движение с остановкой. Пока шайба скользит, сила трения постоянна и тормозит её с постоянным ускорением μg. Но трение не разгоняет её обратно: остановившись, шайба стоит. Поэтому есть два сценария — к моменту 2τ шайба ещё едет или уже стоит — и каждый надо проверить: при каком ускорении он согласуется с данными.

Обозначения. v_0 — начальная скорость; a — модуль ускорения при скольжении; $t_{\text{ост}} = v_0/a$ — время до остановки; ось x — вдоль движения, начало — в начальной точке.

1. Ускорение через трение. Пока шайба скользит, на неё действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ против скорости (рис. 2). Второй закон Ньютона в проекции на вертикаль: $N = mg$; на ось x: $ma_x = -F_{\text{тр}} = -\mu mg$. Значит, ускорение направлено против скорости и по модулю $a = \mu g$, то есть $\mu = a/g$.

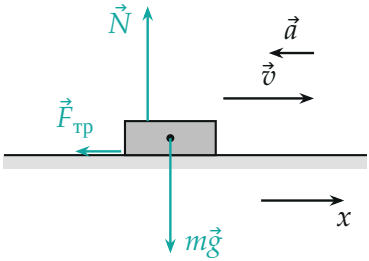


Рис. 2. Силы на скользящую шайбу: $N = mg$, $F_{тр} = \mu mg = 0{,}4\,mg$ (длины в одном масштабе). Ускорение против скорости.

2. Шайба не остановилась до 2τ. Закон равнозамедленного движения $x(t) = v_0 t - at^2/2$ для двух моментов:

$$S_1 = v_0\tau - \frac{a\tau^2}{2}, \qquad S_2 = 2v_0\tau - 2a\tau^2.$$

Вычтем из удвоенного первого второе — v_0 уйдёт:

$$2S_1 - S_2 = a\tau^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{2S_1 - S_2}{\tau^2} = \frac{0{,}16 - 0{,}12}{0{,}01}\ \text{м/с}^2 = 4\ \text{м/с}^2.$$

Начальная скорость $v_0 = S_1/\tau + a\tau/2 = 0{,}8 + 0{,}2 = 1{,}0$ м/с. *Проверка допущения*: шайба остановится через $t_{ост} = v_0/a = 0{,}25$ с $> 2\tau = 0{,}2$ с — действительно ещё едет. Сценарий подходит: $\mu = a/g = 0{,}4$.

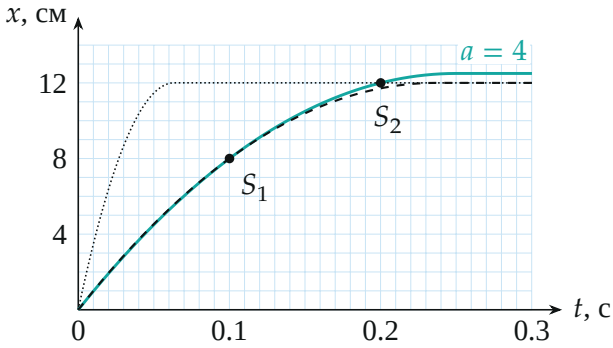


Рис. 3. Координата шайбы. Бирюзовая — $a = 4$ м/с^2: проходит через обе точки и останавливается в $t = 0{,}25$ с. Пунктир — $a = 4{,}29$ м/с^2, точечная

— $a = 59{,}7$ м/с^2 (сценарий шага 3): каждая проходит только через одну из точек.

3. Шайба остановилась между τ и 2τ. Тогда S_2 — весь тормозной путь. Кинематика равнозамедленного движения до остановки: $S_2 = v_0^2/(2a)$. Вместе с $S_1 = v_0\tau - a\tau^2/2$, то есть $v_0 = S_1/\tau + a\tau/2$:

$$2aS_2 = \left(\frac{S_1}{\tau} + \frac{a\tau}{2}\right)^2 \;\Rightarrow\; 0{,}24\,a = (0{,}8 + 0{,}05\,a)^2 \;\Rightarrow\; a^2 - 64a + 256 = 0$$

(a в м/с^2). Корни $a = 32 \pm \sqrt{768} = 16\,(2 \pm \sqrt{3})$, то есть 59,7 и 4,29 м/с^2. Проверяем время остановки:

- $a = 4{,}29$ м/с^2: $v_0 = 0{,}8 + 0{,}05 \cdot 4{,}29 = 1{,}014$ м/с, $t_{ост} = 0{,}237$ с $> 2\tau$ — шайба в момент 2τ ещё едет, а мы предполагали, что стоит; к тому же тогда в 2τ было бы 11,7 см, а не 12;
- $a = 59{,}7$ м/с^2: $v_0 = 3{,}79$ м/с, $t_{ост} = 0{,}063$ с $< \tau$ — шайба остановилась ещё до τ и в момент τ стояла бы на 12 см, а не на 8.

Оба корня противоречат допущению — этот сценарий невозможен (рис. 3, 4). Сценарий «остановилась до τ» отпадает сразу: тогда $S_1 = S_2$.

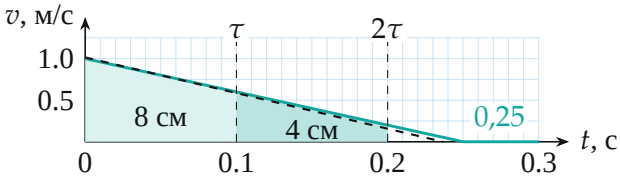


Рис. 4. Скорость шайбы при $a = 4$ м/с^2 (бирюзовая): площади под графиком за первый и второй интервалы τ — 8 и 4 см. Пунктир — корень 4,29 м/с^2 из шага 3: он тоже не останавливается к 2τ.

Обратите внимание. Ответ $a = (2S_1 - S_2)/\tau^2$ верен только при условии, что шайба ещё едет; без проверки $t_{ост} > 2\tau$ решение неполное. Здесь проверка проходит, а второй сценарий — нет.

Соберём ответ.

$$\mu = \frac{2S_1 - S_2}{g\tau^2} = \frac{0{,}16 - 0{,}12}{10 \cdot 0{,}01} = 0{,}4.$$

Проверка. Размерность: м/(м/с^2·с^2) — безразмерно. Второй способ: при равнозамедленном движении пути за последовательные равные интервалы убывают на $a\tau^2$: $8 - 4 = 4$ см $= a \cdot 0{,}01$ с^2, $a = 4$ м/с^2 — то же. Значение $\mu = 0{,}4$ — обычное для резины по асфальту, разумно.

Шайба с $\mu = 0{,}4$ — единственный вариант: «пройти 8, потом ещё 4» может только шайба, которая к концу второго интервала ещё скользит.

Ответ. $\mu = \dfrac{2S_1 - S_2}{g\tau^2} = 0{,}4$ (единственное возможное значение).