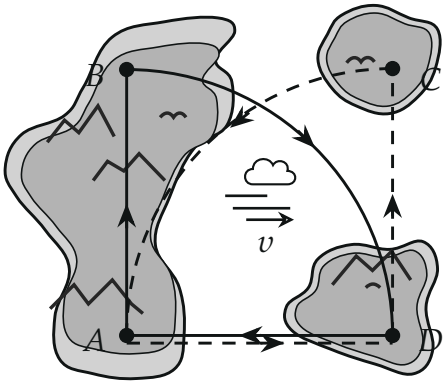
Четыре города

Задача 4. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, задача 4] «Четыре города».

Четыре города расположены в вершинах квадрата $ABCD$ (см. рис.). Параллельно направлению AD дует сильный ветер (из A в D) со скоростью v. Два одинаковых самолёта вылетают из города A и движутся по разным маршрутам: первый по $ABDA$, второй по $ADCA$ (BD и CA — «четвертинки» окружности). Найдите отношение времён движения самолётов по маршрутам $\dfrac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}}$? Скорость самолёта при отсутствии ветра равна u.



▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на сложение скоростей (самолёт относительно воздуха плюс ветер). Самолёт летит точно по маршруту — значит, его скорость относительно земли $\vec{w}$ направлена по траектории, а собственная скорость $\vec{u}$ (модуль u) повёрнута так, чтобы снос ветром компенсировался. Сравнивать маршруты целиком тяжело, но их можно разбить на пары похожих участков: AB и DC (поперёк ветра), AD и DA (по ветру и против), дуги BD и CA (зеркальные). Выигрыш на одной паре должен скомпенсироваться проигрышем на другой.

Обозначения. l — сторона квадрата (и радиус дуг: дуга BD — с центром A, дуга CA — с центром D); $\vec{w}$ — скорость самолёта относительно земли; θ — угол между направлением полёта и ветром; оси τ — по траектории, n — поперёк неё.

1. Скорость относительно земли на прямом участке. Закон сложения скоростей: $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ (рис. 2). Проекция на ось n: $w_n = 0$, то есть $u_n = -v_n = -v\sin\theta$ — самолёт разворачивает нос против сноса. Проекция на τ: $w = u_\tau + v_\tau$, где $u_\tau = \sqrt{u^2 - u_n^2}$:

$$w = \sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta} + v\cos\theta.$$

Время на малом участке Δl — $\Delta t = \Delta l/w$. Освободимся от корня в знаменателе, домножив на $\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta$:

$$\Delta t = \frac{\Delta l\left(\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta} - v\cos\theta\right)}{u^2 - v^2} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2\sin^2\theta}}{u^2 - v^2}\,\Delta l - \frac{v}{u^2 - v^2}\,\Delta x,$$

где $\Delta x = \Delta l\cos\theta$ — смещение самолёта вдоль ветра. Первое слагаемое не меняется, если ветер повернуть на 180° ($\sin^2\theta$ тот же), второе меняет знак.

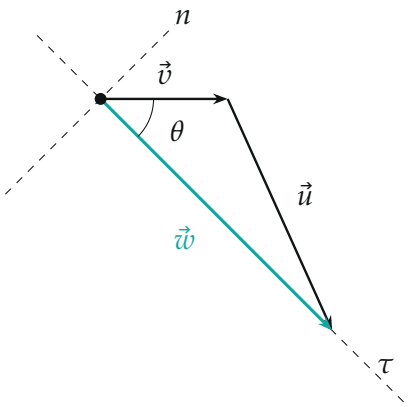


Рис. 2. Сложение скоростей на участке дуги BD (построено для $u = 2v$, точка дуги под 45°): $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ направлена по траектории τ; поперечные проекции $\vec{u}$ и $\vec{v}$ гасят друг друга. $|\vec{w}| = 1{,}29\,u$.

2. Участки поперёк ветра. На AB и DC $\theta = 90°$, $\Delta x = 0$: $t_{AB} = t_{DC} = \dfrac{l}{\sqrt{u^2 - v^2}}$.

3. Участки вдоль ветра. По ветру (AD, $\theta = 0$): $t_{AD} = \dfrac{l}{u+v}$; против (DA, $\theta = 180°$): $t_{DA} = \dfrac{l}{u-v}$. Первый маршрут летит DA, второй AD, разница

$$\Delta t_1 = t_{DA} - t_{AD} = \frac{l}{u-v} - \frac{l}{u+v} = \frac{2vl}{u^2-v^2} > 0.$$

Здесь первый маршрут проигрывает.

4. Дуги. Отразим дугу CA зеркально относительно вертикальной оси симметрии квадрата (рис. 4): центр D переходит в A, C — в B, A — в D. Получается дуга BD, пройденная в том же направлении $B \to D$, но ветер после отражения дует навстречу. Значит, малый участок Δl дуги CA — это участок дуги BD с тем же $\sin^2\theta$ и противоположным Δx (рис. 2 и 3). По формуле шага 1 разность времён на паре таких участков

$$\Delta t_{BD} - \Delta t_{CA} = -\frac{2v}{u^2-v^2}\,\Delta x,$$

где Δx — смещение по ветру на дуге BD. Суммируем по всей дуге: $\sum \Delta x = l$ (от B до D самолёт сместился по ветру на l):

$$\Delta t_2 = t_{BD} - t_{CA} = -\frac{2vl}{u^2-v^2}.$$

На дугах первый маршрут выигрывает — ровно столько же.

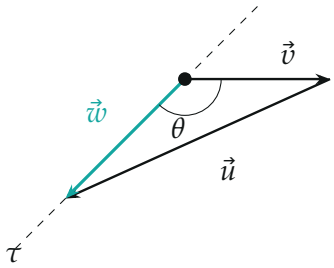


Рис. 3. Зеркальный участок дуги CA: траектория идёт против ветра под тем же углом к поперечному направлению, $\sin^2\theta$ тот же, $\cos\theta$ сменил знак. Скорость относительно земли меньше: $|\vec{w}| = 0{,}58\,u$.

5. Сумма. $t_{ABDA} - t_{ADCA} = (t_{AB} - t_{DC}) + \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0 + \dfrac{2vl}{u^2 - v^2} - \dfrac{2vl}{u^2 - v^2} = 0.$

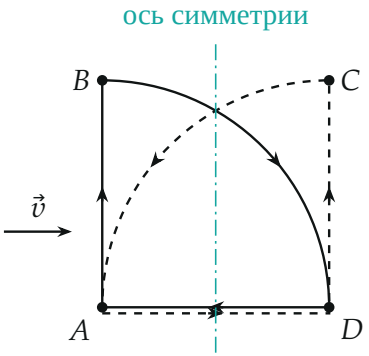


Рис. 4. Маршруты: ABDA — сплошной, ADCA — пунктир. Отражение относительно оси симметрии переводит один в другой с тем же направлением обхода, но с ветром навстречу.

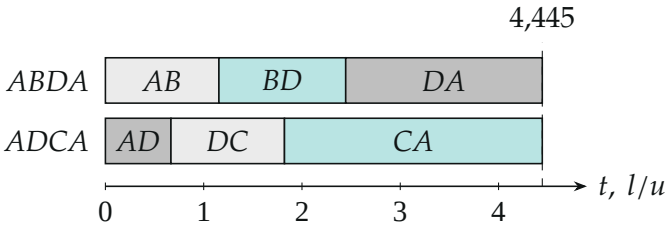


Рис. 5. Времена участков при $v = u/2$ (в единицах l/u): первый маршрут проигрывает на прямой против ветра (DA) и выигрывает на дуге (BD), второй — наоборот; суммы совпадают.

Обратите внимание. Вклад ветра в время, $-v\Delta x/(u^2 - v^2)$, зависит только от смещения вдоль ветра. По любому замкнутому маршруту суммарное смещение равно нулю, поэтому его время такое же, как у зеркального маршрута, — здесь это и есть оба пути (рис. 4).

Соберём ответ.

$$\frac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = 1.$$

Проверка. Предел $v \to 0$: маршруты одинаковой длины $2l + \pi l/2$, времена равны — верно. Численно (python, $u = 1$, $v = 0{,}5$, $l = 1$, интеграл по дугам): $t_{ABDA} = 1{,}155 + 1{,}290 + 2{,}000 = 4{,}445$, $t_{ADCA} = 0{,}667 + 1{,}155 + 2{,}623 = 4{,}445$ — совпадают (рис. 5). Размерность $vl/(u^2 - v^2)$ — секунды.

Ветер по замкнутому маршруту ни помогает, ни мешает «знаком»: что выиграно по ветру, проиграно против. Остаётся только снос, а он у зеркальных маршрутов одинаков.

Ответ. $\dfrac{t_{ABDA}}{t_{ADCA}} = 1.$