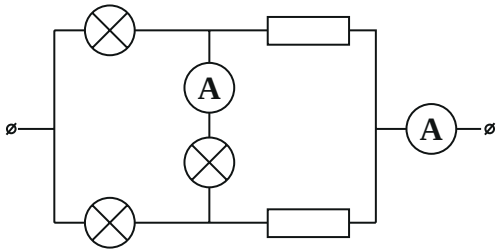
Нелинейный мост

Задача 5. [ВсОШ 2019/20, региональный этап, 9 класс, задача 5] «Нелинейный мост».

Электрическая цепь, изображённая на рисунке, состоит из трёх одинаковых нелинейных элементов, двух резисторов и двух идеальных амперметров. Сила тока через нелинейный элемент пропорциональна квадратному корню из напряжения на нём:

$$I = a\sqrt{U}.$$

Известно, что один из амперметров показывает величину силы тока I_x, а другой — I_y, причём $I_x > I_y$. Определите силу тока в каждом из элементов цепи.



▲ **Решение.** **Что происходит.** Это задача на цепь с нелинейными элементами, где сопротивления резисторов неизвестны — и не нужны. Три нелинейных элемента образуют замкнутый контур «левый узел — верх — середина — низ — левый узел», и по закону сложения напряжений в этом контуре их токи связаны без всяких резисторов. Добавив закон сохранения заряда в узлах, получаем все токи через показания амперметров. Сначала надо понять, какой амперметр что меряет.

Обозначения. Элементы: Λ_1 — верхний левый, Λ_2 — нижний левый, Λ_3 — средний; K — левый узел, P и Q — верхний и нижний узлы средней ветви, M — правый узел; I_1, I_2, I_3, I_4 — токи через Λ_1, Λ_2, верхний и нижний резисторы (рис. 2); I_c — ток средней ветви.

1. ВАХ элемента. Из $I = a\sqrt{U}$: напряжение на элементе $U = I^2/a^2$ (рис. 3) — растёт как квадрат тока.

2. Какой амперметр что показывает. Правый амперметр стоит в общем проводе — он показывает весь ток цепи $I_1 + I_2$. Средний — ток I_c через Λ_3. Пусть, для определённости, Λ_1 несёт больший ток, $I_1 \geq I_2$ (иначе поменяем местами верх и низ). Закон сложения напряжений в контуре $K \to P$ через Λ_1 и $K \to Q \to P$ через Λ_2, Λ_3: напряжение на Λ_1 равно сумме напряжений на Λ_2 и Λ_3 (потенциал Q выше P, рис. 4):

$$\frac{I_1^2}{a^2} = \frac{I_2^2}{a^2} + \frac{I_c^2}{a^2} \;\Rightarrow\; I_c^2 = (I_1 - I_2)(I_1 + I_2) \leq (I_1 + I_2)^2.$$

Значит, ток средней ветви не больше общего, и больший из показаний — общий: $I_x = I_1 + I_2$, $I_c = I_y$; течёт I_y от Q к P.

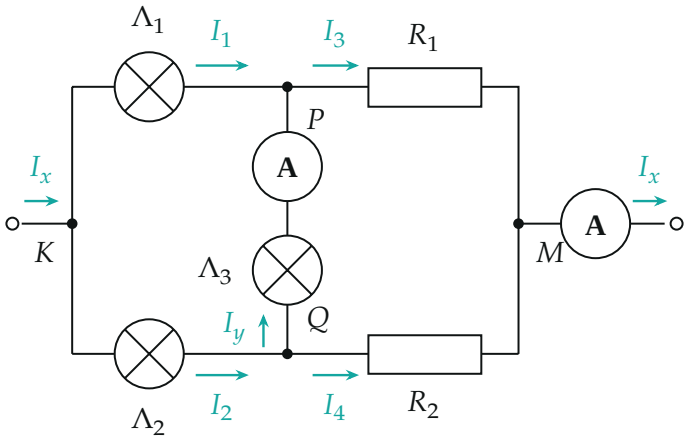


Рис. 2. Токи в цепи. Правый амперметр — общий ток I_x, средний — ток I_y через Λ_3 (от Q к P при $I_1 > I_2$). Сопротивления резисторов R_1, R_2 не заданы и не понадобятся.

3. Токи левых элементов. Из шага 2 система

$$I_1^2 - I_2^2 = I_y^2, \qquad I_1 + I_2 = I_x.$$

Разность квадратов: $(I_1 - I_2)(I_1 + I_2) = I_y^2$, откуда $I_1 - I_2 = I_y^2/I_x$. Скла-

дываем и вычитаем с $I_1 + I_2 = I_x$:

$$I_1 = \frac{I_x^2 + I_y^2}{2I_x}, \qquad I_2 = \frac{I_x^2 - I_y^2}{2I_x}.$$

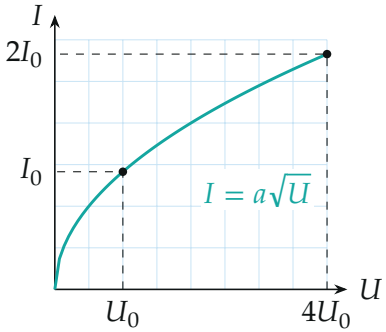


Рис. 3. ВАХ нелинейного элемента: удвоение тока требует учетверения напряжения, $U = I^2/a^2$.

4. Токи резисторов. Закон сохранения заряда (первое правило Кирхгофа) для узла P: в него входят I_1 и I_y, выходит I_3; для узла Q: входит I_2, выходят I_y и I_4:

$$I_3 = I_1 + I_y = \frac{(I_x + I_y)^2}{2I_x}, \qquad I_4 = I_2 - I_y = \frac{I_x^2 - 2I_xI_y - I_y^2}{2I_x}.$$

Проверка узла M: $I_3 + I_4 = \dfrac{2I_x^2}{2I_x} = I_x$ — сходится с правым амперметром.

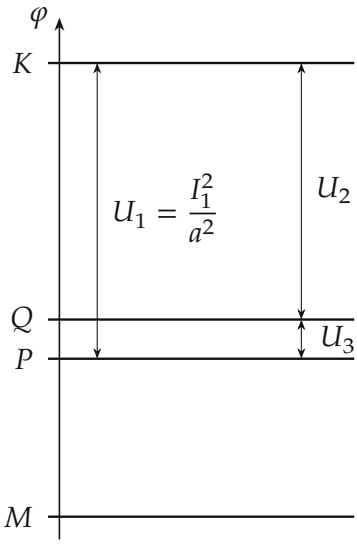


Рис. 4. Потенциалы узлов (для численного примера из проверки, $\varphi_M = 0$): напряжение на Λ_1 равно сумме напряжений на Λ_2 и Λ_3.

5. Допустимые показания. Ток I_4 должен течь от Q к M: на резисторах ток идёт от большего потенциала к меньшему, а $\varphi_Q > \varphi_P > \varphi_M$ (через верхний резистор ток $I_3 > 0$ идёт от P к M). Значит, $I_4 \geq 0$, то есть $I_y^2 + 2I_xI_y \leq I_x^2$:

$$I_y \leq (\sqrt{2} - 1)\, I_x \approx 0{,}41\, I_x$$

— при бóльшем I_y таких показаний в этой цепи не бывает (рис. 5).

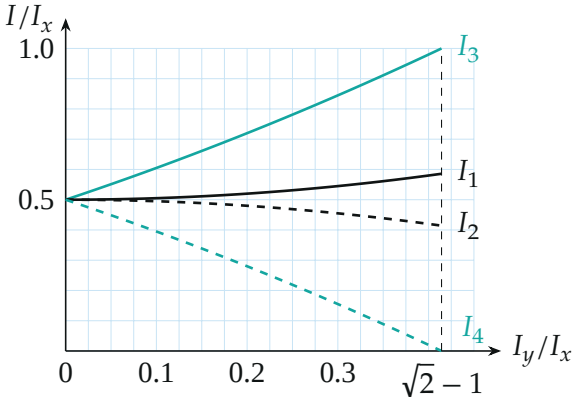


Рис. 5. Токи элементов в долях I_x: чёрные — левые элементы, бирюзовые — резисторы (пунктир — нижние ветви). При $I_y = (\sqrt{2}-1)I_x$ ток нижнего резистора обращается в ноль.

Обратите внимание. Сопротивления резисторов в ответ не входят: всё определяет контур из трёх одинаковых нелинейных элементов. Какая из левых ветвей «сильнее» (верх или низ), зависит от резисторов — в ответе это ветвь, к которой идёт ток средней ветви.

Соберём ответ. Ток через средний элемент I_y; через левые элементы $\dfrac{I_x^2+I_y^2}{2I_x}$ (тот, в чей узел втекает I_y) и $\dfrac{I_x^2-I_y^2}{2I_x}$; через резисторы $\dfrac{(I_x+I_y)^2}{2I_x}$ и $\dfrac{I_x^2-2I_xI_y-I_y^2}{2I_x}$.

Проверка. Размерность — амперы. Предел $I_y \to 0$ (мост сбалансирован): $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_x/2$ — симметрия, верно. Численно (python): при $V = 10$ В, $a = 1$ А/В$^{1/2}$, резисторах 1 и 3 Ом цепь решена напрямую — $I_x = 4{,}931$, $I_y = 0{,}929$, $I_1 = 2{,}553$, $I_2 = 2{,}378$, $I_3 = 3{,}482$, $I_4 = 1{,}449$ А; формулы дают те же числа.

Мост из одинаковых нелинейных элементов «взвешивает» сам себя: показания двух амперметров однозначно задают раздачу токов.

Ответ. I_x — общий ток, I_y — ток через средний элемент; через левые элементы $I_1 = \dfrac{I_x^2+I_y^2}{2I_x}$ (ветвь, в узел которой втекает I_y) и $I_2 = \dfrac{I_x^2-I_y^2}{2I_x}$;

через резисторы $I_3 = \dfrac{(I_x + I_y)^2}{2I_x}$ и $I_4 = \dfrac{I_x^2 - 2I_xI_y - I_y^2}{2I_x}$ (возможно при $I_y \leq (\sqrt{2} - 1)I_x$).