Разгон паровоза

Задача 1. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 1] «Разгон паровоза».

На трёх фотоснимках одного участка местности, сделанных с равными интервалами времени τ, запечатлён игрушечный паровоз и фрагменты шлейфа дыма от него. Наложенные друг на друга фотографии приведены на рисунке.

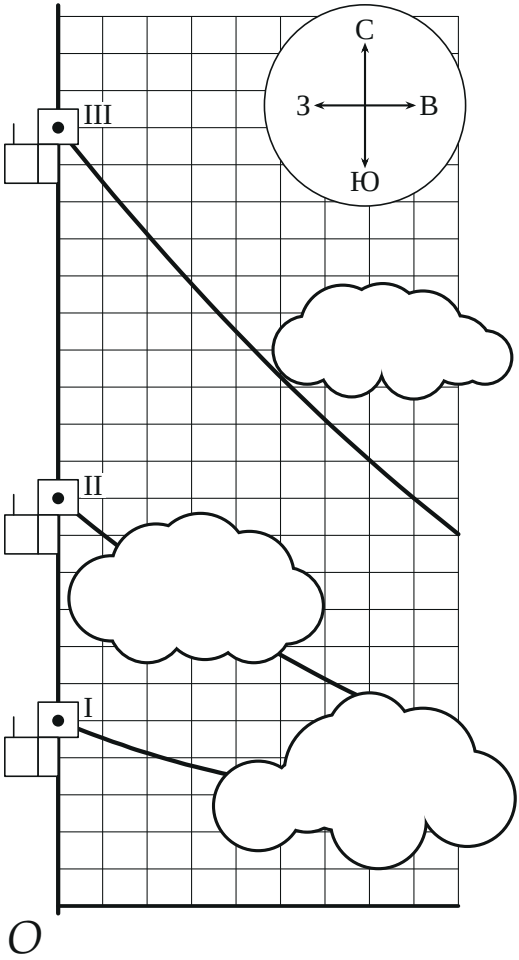


Рис. 1. Наложенные снимки I, II, III (рисунок условия).

Зная, что, тронувшись с места, паровоз поехал на север с постоянным ускорением $a = 0{,}4$ м/с^2, и что в этот день дул западный ветер со скоростью $u = 4$ м/с, найдите интервал времени τ и на каком расстоянии от точки O находилась труба неподвижного паровоза. Цены делений шкал сетки по вертикали и горизонтали равны.

▲ **Решение. Что происходит.** Паровоз разгоняется равноускоренно по прямой на север, а каждый клуб дыма, выпущенный трубой, сразу перестаёт двигаться вместе с паровозом и уносится западным ветром — то есть на восток — со скоростью u. Из снимков читаются две вещи: пути паровоза между снимками (по вертикали) и снос дыма ветром (по горизонтали). Первое даёт $a\tau^2$ в клетках, второе — $u\tau$ в клетках; их отношение не зависит от цены деления и даёт τ. Это задача на равноускоренное движение и сложение движений (дым — в системе воздуха).

Обозначения. Ось y — по рельсам на север от точки O, ось x — на восток. s — цена деления сетки; $y_{\mathrm{I}}, y_{\mathrm{II}}, y_{\mathrm{III}}$ — положения трубы на снимках; v_{I} — скорость паровоза в момент снимка I; t_0 — время от старта до снимка I; y_0 — точка старта.

1. Пути между снимками. По сетке (рис. 1) труба на снимках находится в $y_{\mathrm{I}} = 5s$, $y_{\mathrm{II}} = 11s$, $y_{\mathrm{III}} = 21s$, так что пути за два интервала

$$\Delta y_1 = y_{\mathrm{II}} - y_{\mathrm{I}} = 6s, \qquad \Delta y_2 = y_{\mathrm{III}} - y_{\mathrm{II}} = 10s.$$

2. Ускорение через разность путей. При равноускоренном движении путь за интервал τ, начавшийся со скоростью v, равен $v\tau + \frac{a\tau^2}{2}$. Второй интервал начинается со скоростью на $a\tau$ больше, чем первый, поэтому разность путей за соседние равные интервалы

$$\Delta y_2 - \Delta y_1 = a\tau \cdot \tau = a\tau^2 \quad \Rightarrow \quad a\tau^2 = 4s.$$

3. Где паровоз стоял. Путь за первый интервал: $\Delta y_1 = v_{\mathrm{I}}\tau + \frac{a\tau^2}{2}$, то есть $6s = v_{\mathrm{I}}\tau + 2s$, $v_{\mathrm{I}}\tau = 4s = a\tau^2$. Значит, $v_{\mathrm{I}} = a\tau$: к снимку I паровоз ехал ровно время $t_0 = v_{\mathrm{I}}/a = \tau$ и прошёл

$$y_{\mathrm{I}} - y_0 = \frac{at_0^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} = 2s \quad \Rightarrow \quad y_0 = 5s - 2s = 3s.$$

Проверим себя законом «пути за равные интервалы от старта относятся как 1 : 3 : 5» (рис. 2–3): $2s : 6s : 10s = 1 : 3 : 5$ — сходится.

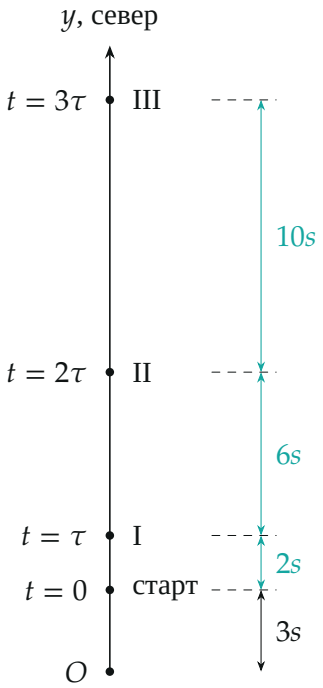


Рис. 2. Положения трубы: старт в $3s$ от точки O, затем пути $2s$, $6s$, $10s$ за равные интервалы τ.

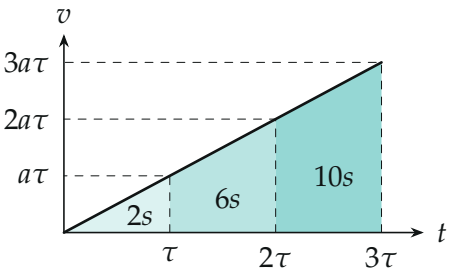


Рис. 3. Скорость паровоза: старт за τ до снимка I. Пути — площади под графиком, они относятся как $1 : 3 : 5$; лишняя площадь от интервала к интервалу — квадрат $a\tau \cdot \tau$.

4. Снос дыма. Клуб дыма, вылетев из трубы, движется вместе с воздухом: свою скорость паровоза он быстро теряет в воздухе, поэтому на север больше не смещается, а на восток его несёт ветер со скоростью u. Возьмём клуб, выпущенный в момент снимка II на высоте $y_{II} = 11s$. К снимку III, за время τ, он сдвинулся на восток на $u\tau$ и остался на высоте $11s$. На снимке III шлейф на высоте $11s$ проходит через $x = 8s$ (рис. 4):

$$u\tau = 8s.$$

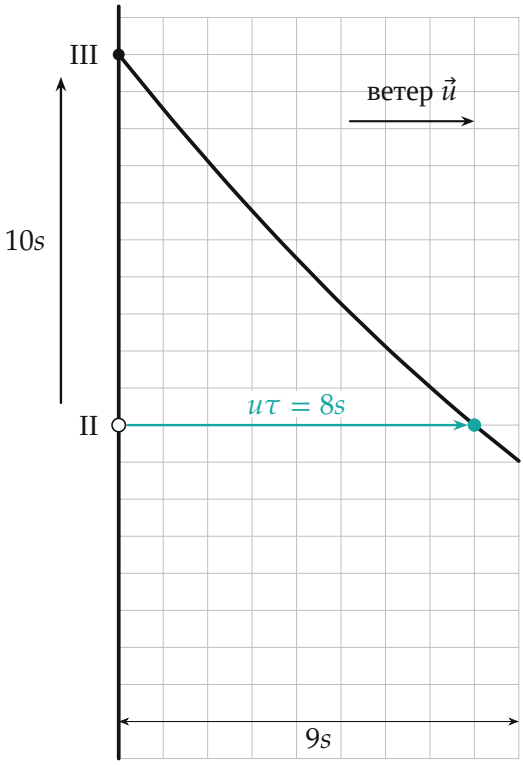


Рис. 4. Шлейф на снимке III. Клуб дыма, выпущенный в момент снимка II у отметки $11s$, за время τ снесён ветром на восток на $u\tau = 8s$ (бирюзовая стрелка), пока паровоз прошёл $10s$.

5. Время и масштаб. Делим результаты шагов 2 и 4 — цена деления

сокращается:

$$\frac{u\tau}{a\tau^2} = \frac{8s}{4s} = 2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{u}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 0{,}4}\ \text{с} = 5\ \text{с}.$$

Цена деления: $s = \dfrac{a\tau^2}{4} = \dfrac{0{,}4 \cdot 25}{4}$ м $= 2{,}5$ м. Труба неподвижного паровоза была на расстоянии

$$y_0 = 3s = \frac{3a\tau^2}{4} = \frac{3u^2}{16a} = 7{,}5\ \text{м}$$

севернее точки O.

Обратите внимание. Нельзя считать, что паровоз стоял на снимке I: путь $6s$ за первый интервал и $10s$ за второй — это не $1:3$, а $3:5$. Значит, до снимка I паровоз уже ехал время τ.

Проверка. Размерности: $[u/a] = \dfrac{\text{м/с}}{\text{м/с}^2} = \text{с}$, $[u^2/a] = \text{м}$. Второй способ для $u\tau$: весь шлейф снимка III — точки $x = u(3\tau - t')$, $y = y_0 + \frac{at'^2}{2}$ для моментов выпуска t'; при $t' = 0$ это $(3u\tau;\ 3s)$, при $t' = 2\tau$ — $(u\tau;\ 11s)$. С $u\tau = 8s$ и $a\tau^2 = 4s$ этот шлейф выходит за край сетки ($x = 9s$) на высоте $y = 10s$ — как на снимке. Смысл: дым — «часы» в системе воздуха, а сетка без масштаба всё равно даёт ответ, потому что из снимков берётся только отношение двух длин.

Ответ. $\tau = \dfrac{u}{2a} = 5$ с; труба неподвижного паровоза была в $y_0 = 3s = \dfrac{3u^2}{16a} = 7{,}5$ м к северу от точки O (цена деления $s = 2{,}5$ м).