Шарнир и колечко

Задача 2. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 2] «Шарнир и колечко».

В вертикальной плоскости находятся два невесомых стержня, соединённых шарниром массы M. На свободном конце верхнего стержня закреплён груз массы m, а на свободном конце нижнего стержня закреплено лёгкое колечко, которое может скользить по гладкой горизонтальной закреплённой спице. Длина верхнего стержня l, длина нижнего стержня $L > l$. Изначально стержни составляют углы α с горизонтом и удерживаются неподвижно. Затем их отпускают.

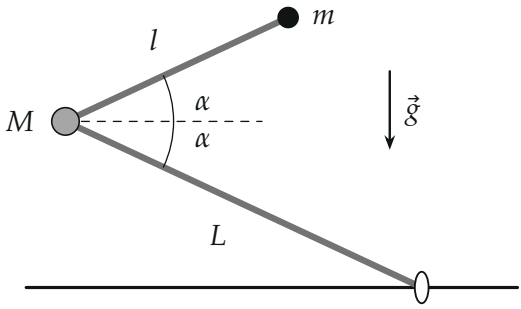


Рис. 1. Рисунок условия: шарнир M, груз m на верхнем стержне, колечко на спице.

1. Найдите ускорения шарнира $a_{ш0}$ и грузика $a_{г0}$ сразу после начала движения.
2. Найдите ускорение колечка $a_к$ в момент времени, когда шарнир, груз и колечко окажутся на одной прямой.

Считайте, что стержни и спица тонкие и все тела могут пролетать мимо друг друга не соударяясь. Ускорение свободного падения g.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Главная идея — в невесомом нижнем стержне: на тело без массы сумма сил и сумма моментов сил всегда равны нулю, а колечко на гладкой спице может давить на стержень только вертикально. Отсюда нижний стержень вообще ни на что не действует, и верхний стержень с шарниром и грузом падает свободно, не поворачиваясь. Колечко лишь «следит» за шарниром: его положение задаёт гео-

метрия. Это задача на связи с невесомыми звеньями и на кинематику в неинерциальной системе отсчёта колечка.

Обозначения. Ось x — вдоль спицы от шарнира к колечку, ось y — вверх, начало — на спице под шарниром. y — высота шарнира над спицей, v — скорость шарнира, u — скорость колечка, $\vec{F}$ — сила со стороны шарнира на нижний стержень, $\vec{N}$ — сила со стороны колечка.

Пункт 1.

1. Нижний стержень не нагружен. Колечко лёгкое, спица гладкая: на колечко действуют только реакция спицы (вертикально) и стержень, и для тела без массы их сумма равна нулю. Значит, стержень давит на колечко, а колечко на стержень — только вертикально: $\vec{N}$ вертикальна. Второй закон Ньютона для невесомого стержня: $\vec{F} + \vec{N} = 0$, то есть $\vec{F}$ тоже вертикальна и равна $-\vec{N}$. Две равные противоположные вертикальные силы на концах наклонного стержня — пара сил с моментом $N \cdot L\cos\alpha$ (рис. 2). Для невесомого стержня момент обязан быть нулевым, поэтому

$$N = F = 0.$$

Это верно в любой момент, пока стержень не вертикален.

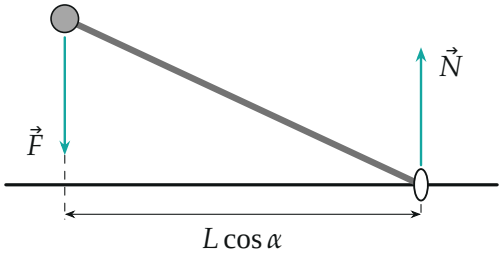


Рис. 2. Нижний (невесомый) стержень: вертикальная сила колечка $\vec{N}$ и сила шарнира $\vec{F} = -\vec{N}$ образуют пару с плечом $L\cos\alpha$. Момент пары должен быть нулём — значит, $N = F = 0$.

2. Верхняя часть падает свободно. На систему «шарнир + верхний стержень + груз» по третьему закону Ньютона со стороны нижнего стержня действует $-\vec{F} = 0$, остаются только силы тяжести $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$. Проверим, что стержень l тоже не нагружен: если и шарнир, и груз

движутся с ускорением $\vec{g}$, то при нулевых начальных скоростях расстояние между ними не меняется, и стержню незачем ни тянуть, ни толкать — сила в нём нулевая. Такое движение удовлетворяет второму закону Ньютона для каждого тела, а решение уравнений движения единственно. Поэтому

$$\vec{a}_{\text{ш}0} = \vec{a}_{\text{г}0} = \vec{g}, \qquad a_{\text{ш}0} = a_{\text{г}0} = g \text{ (вниз)}.$$

Начальные скорости нулевые, поэтому верхний стержень движется поступательно, сохраняя наклон α, — и так всё время движения (шаг 1 верен в любой момент).

Пункт 2.

3. Когда три тела на одной прямой. Шарнир падает вертикально, колечко всё время на расстоянии L от него по стержню, на спице. Верхний стержень смотрит вверх-вправо под углом α. Прямая «шарнир — груз» пройдёт через колечко, когда нижний стержень тоже будет смотреть из шарнира вверх-вправо под углом α, то есть когда шарнир опустится на $L\sin\alpha$ ниже спицы (рис. 3). Шарнир прошёл по вертикали

$$h = 2L\sin\alpha.$$

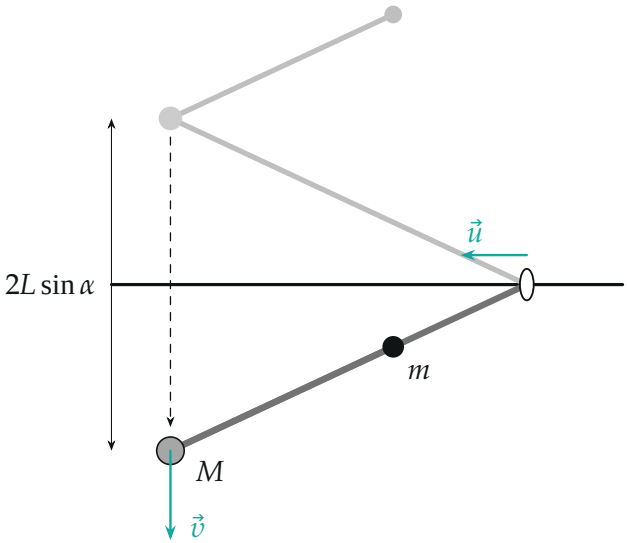


Рис. 3. Начальное (бледно) и искомое положения. Верхний стержень опустился поступательно на $2L\sin\alpha$; теперь шарнир, груз и колечко на одной прямой под углом α. Колечко едет к шарниру.

4. Скорость шарнира. Свободное падение с нулевой начальной скоростью на высоту h (или закон сохранения энергии системы — силы связей работы не совершают):

$$v^2 = 2gh = 4gL\sin\alpha.$$

5. Переход в систему колечка. Расстояние от шарнира до колечка постоянно и равно L, поэтому в системе отсчёта колечка шарнир движется по окружности радиуса L с центром в колечке. Его относительная скорость $\vec{v}_{\text{отн}} = \vec{v} - \vec{u}$ перпендикулярна стержню. Проекция на вертикаль у $\vec{u}$ нулевая, поэтому вертикальная составляющая $\vec{v}_{\text{отн}}$ равна v, и из прямоугольного треугольника скоростей (стержень под углом α к горизонту, $\vec{v}_{\text{отн}}$ — под углом α к вертикали)

$$v_{\text{отн}} = \frac{v}{\cos\alpha}, \qquad u = v\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

6. Центростремительное ускорение в системе колечка. Система колечка движется с ускорением $\vec{a}_{\text{к}}$ вдоль спицы (к шарниру, по $-x$), и ускорение шарнира в ней $\vec{a}' = \vec{g} - \vec{a}_{\text{к}}$. Ось n — вдоль стержня от шарнира к колечку (рис. 4): на неё проекция ускорения при движении по окружности — центростремительное $v_{\text{отн}}^2/L$, а неизвестное касательное ускорение в уравнение не войдёт. Проекция на ось n, $\hat{n} = (\cos\alpha;\ \sin\alpha)$:

$$a'_n = -g\sin\alpha + a_{\text{к}}\cos\alpha = \frac{v_{\text{отн}}^2}{L}.$$

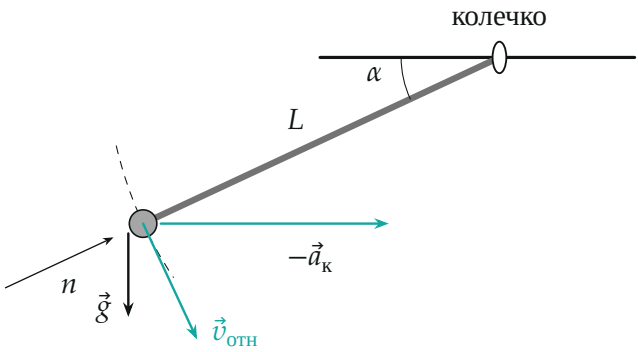


Рис. 4. Система отсчёта колечка: шарнир идёт по окружности радиуса L (пунктир) со скоростью $\vec{v}_{отн} \perp$ стержню. Ускорение шарнира в ней — $\vec{g} - \vec{a}_к$; берём его проекцию на ось n вдоль стержня к центру.

7. Ответ пункта 2. Подставим $v_{отн}^2 = \dfrac{4gL\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$:

$$a_к = \frac{v_{отн}^2}{L\cos\alpha} + g\operatorname{tg}\alpha = \frac{4g\sin\alpha}{\cos^3\alpha} + g\operatorname{tg}\alpha,$$

$$a_к = g\operatorname{tg}\alpha\Big(\frac{4}{\cos^2\alpha} + 1\Big) = g\,(5 + 4\operatorname{tg}^2\alpha)\operatorname{tg}\alpha.$$

$a_к > 0$: колечко ускоряется к шарниру (по $-x$), в ту же сторону, куда едет, — разгоняется.

Обратите внимание. Ускорение колечка не находится «из сил»: на него сила не действует вовсе, а ускорение конечно — потому что колечко невесомое. Его движение — чистая кинематика связи, и найти его можно только из геометрии.

Проверка. Размерность: $[g\operatorname{tg}\alpha] = \text{м/с}^2$. Второй способ — продифференцировать связь: $x = \sqrt{L^2 - y^2}$, $\dot{x} = -\dfrac{y\dot{y}}{x}$, $\ddot{x} = -\dfrac{\dot{y}^2 + y\ddot{y}}{x} - \dfrac{y^2\dot{y}^2}{x^3}$. При $y = -L\sin\alpha$, $x = L\cos\alpha$, $\dot{y}^2 = 4gL\sin\alpha$, $\ddot{y} = -g$:

$$\ddot{x} = -\frac{\dot{y}^2}{x}\Big(1 + \frac{y^2}{x^2}\Big) - \frac{y\ddot{y}}{x} = -\frac{4g\sin\alpha}{\cos^3\alpha} - g\operatorname{tg}\alpha,$$

модуль тот же, знак «минус» — к шарниру. Численное дифференциро-

вание $x(t)$ при $\alpha = 0{,}5$ рад даёт 33,16 м/с^2 при формуле 33,16 м/с^2. Предел $\alpha \to 0$: стержни горизонтальны, шарнир на уровне спицы, $h \to 0$ — и $a_к \to 0$. Смысл: колечко, к которому не приложено ни одной силы, может иметь сколь угодно большое ускорение — его диктует связь.

Ответ. 1) $a_{ш0} = a_{г0} = g$, обе вниз; 2) $a_к = g\,(5 + 4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, к шарниру вдоль спицы.