Воздушный шар

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 3] «Воздушный шар».

Оболочка воздушного шара изготовлена из нерастяжимой плотной ткани с массовой поверхностной плотностью σ (масса 1 м^2 поверхности оболочки численно равна σ). Если оболочку полностью заполнить газом, то она приобретает форму сферы радиусом r. В пустую оболочку закачивают некоторое количество гелия.

1. При каких значениях массы m гелия шар будет подниматься?
2. Какому соотношению должны удовлетворять параметры шара, чтобы его подъём был возможен?

Молярная масса гелия M_{He}, воздуха — M_{B}, атмосферное давление p_0, температура — T. Объём шара $V = 4\pi r^3/3$, площадь сферы $S = 4\pi r^2$.

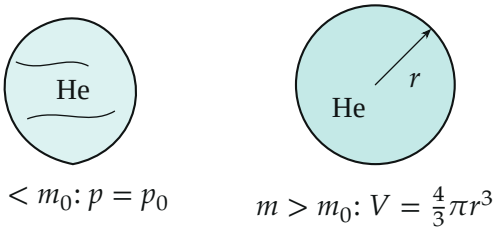


Рис. 1. Поясняющий рисунок. Пока гелия мало, оболочка не расправлена и давление гелия атмосферное; после расправления объём больше не растёт.

▲ **Решение. Что происходит.** Мягкая оболочка сначала не мешает гелию: его давление равно атмосферному, и объём растёт пропорционально массе. Шар взлетает, когда сила Архимеда больше силы тяжести гелия и оболочки. Пока оболочка не расправлена, добавка гелия увеличивает подъёмную силу (гелий вытесняет воздух, который в $M_{\text{B}}/M_{\text{He}}$ раз тяжелее). Когда оболочка расправилась, объём больше не растёт, и лишний гелий только утяжеляет шар. Значит, подъёмная сила как функция m — «домик» с вершиной при полном расправлении; отсюда и нижняя, и верхняя граница массы. Это задача на уравнение Менделеева — Клапейрона и закон Архимеда с переменой режима.

Обозначения. m_0 — масса гелия, при которой оболочка как раз расправилась; V — объём шара; $\rho_\text{В}$ — плотность воздуха; $m_\text{об} = \sigma S = 4\pi r^2\sigma$ — масса оболочки; F — результирующая сила (Архимеда минус тяжести), ось y — вверх.

1. Плотность воздуха и объём гелия. Уравнение Менделеева — Клапейрона для воздуха: $p_0 = \dfrac{\rho_\text{В}}{M_\text{В}}RT$, отсюда $\rho_\text{В} = \dfrac{p_0 M_\text{В}}{RT}$. Пока оболочка не расправлена, ткань не натянута и давление гелия равно p_0; то же уравнение для гелия:

$$V = \frac{mRT}{M_\text{He}p_0} \qquad (m \le m_0),$$

а оболочка расправится, когда V станет $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi r^3\,\frac{p_0 M_\text{He}}{RT}.$$

При $m > m_0$ объём остаётся $\frac{4}{3}\pi r^3$, а давление гелия растёт выше p_0 — его держит нерастяжимая ткань (рис. 2).

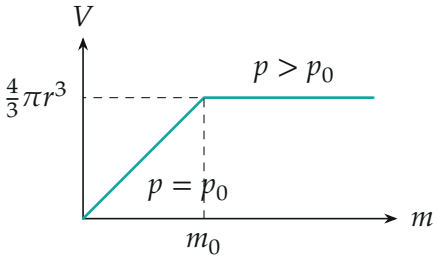


Рис. 2. Объём шара от массы гелия: сначала растёт пропорционально m (давление атмосферное), после m_0 постоянен.

2. Условие подъёма. Второй закон Ньютона для шара в проекции на ось y в момент старта: шар поднимается, если $F > 0$ (рис. 3):

$$F = \rho_\text{В}Vg - mg - 4\pi r^2\sigma g > 0.$$

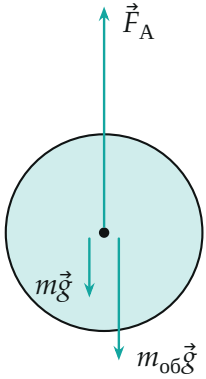


Рис. 3. Силы на шар: сила Архимеда и силы тяжести гелия и оболочки (длины — для случая, когда шар взлетает).

3. Нижняя граница ($m \le m_0$). Подставим V и ρ_B:

$$\frac{p_0 M_B}{RT}\cdot\frac{mRT}{M_{He}p_0} - m > 4\pi r^2\sigma \quad\Rightarrow\quad m\Big(\frac{M_B}{M_{He}} - 1\Big) > 4\pi r^2\sigma,$$

$$m > m_1 = \frac{4\pi r^2\sigma M_{He}}{M_B - M_{He}}.$$

Каждый грамм гелия вытесняет $M_B/M_{He} \approx 7$ г воздуха и даёт около 6 г подъёмной силы — этим и надо «оплатить» оболочку.

4. Верхняя граница ($m \ge m_0$). Теперь $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ постоянен:

$$\frac{4}{3}\pi r^3\frac{p_0 M_B}{RT} - m > 4\pi r^2\sigma \quad\Rightarrow\quad m < m_2 = 4\pi r^2\Big(\frac{p_0 M_B r}{3RT} - \sigma\Big).$$

5. Ответ пункта 1. Шар поднимается при

$$\frac{4\pi r^2\sigma M_{He}}{M_B - M_{He}} < m < 4\pi r^2\Big(\frac{p_0 M_B r}{3RT} - \sigma\Big).$$

Границы относятся к разным режимам, и это согласовано: при выполнении условия шага 6 оказывается $m_1 < m_0 < m_2$ (рис. 4).

6. Пункт 2: когда подъём вообще возможен. Результирующая сила $F(m)$ при $m < m_0$ растёт ($dF/dm = g(M_B/M_{He} - 1) > 0$), при $m > m_0$

убывает ($dF/dm = -g$). Её максимум — при $m = m_0$, когда оболочка точно расправлена и гелий ещё при атмосферном давлении. Подъём возможен, только если в максимуме $F > 0$:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \frac{p_0(M_\text{В} - M_\text{He})}{RT} > 4\pi r^2 \sigma \quad \Rightarrow \quad r > r_\text{min} = \frac{3RT\sigma}{p_0(M_\text{В} - M_\text{He})}.$$

То же даёт требование $m_1 < m_2$: $\dfrac{\sigma M_\text{He}}{M_\text{В} - M_\text{He}} < \dfrac{p_0 M_\text{В} r}{3RT} - \sigma \quad \Leftrightarrow$ $\dfrac{\sigma M_\text{В}}{M_\text{В} - M_\text{He}} < \dfrac{p_0 M_\text{В} r}{3RT}$ — то же неравенство. При $r \leq r_\text{min}$ шар не взлетит ни при какой массе гелия.

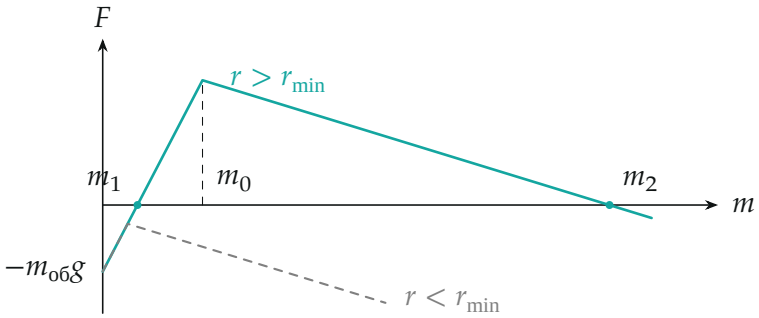


Рис. 4. Результирующая сила от массы гелия — «домик» с вершиной при m_0. Шар взлетает между нулями m_1 и m_2; у слишком маленького шара (серый пунктир). Наклоны ветвей — для гелия: левая в $M_В/M_{He} - 1 \approx 6$ раз круче правой вершина ниже нуля.

Обратите внимание. Перекачанный шар не взлетает: после расправления оболочки гелий сжимается, объём не растёт, а масса растёт. Поэтому верхняя граница массы существует, хотя гелий легче воздуха.

Проверка. Размерность: $\left[\dfrac{RT\sigma}{p_0 M}\right] = \dfrac{\text{Дж/моль} \cdot \text{кг/м}^2}{\text{Па} \cdot \text{кг/моль}} = \dfrac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{Н/м}^2 \cdot \text{м}^2} =$ м. Предел: при $\sigma \to 0$ $m_1 \to 0$, $r_\text{min} \to 0$ — невесомая оболочка с гелием взлетает при любом количестве гелия, пока он не сжат сильнее, чем до плотности воздуха: $m_2 \to \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_\text{В}$ — масса воздуха в объёме шара, как и должно быть. Оценка: для ткани $\sigma = 0{,}1$ кг/м^2 при $T = 290$ К $r_\text{min} =$

$\dfrac{3\cdot 8{,}31\cdot 290\cdot 0{,}1}{10^5\cdot 0{,}025}\approx 0{,}3$ м — настоящие шары намного больше. Смысл: подъёмная сила растёт как r^3, а вес оболочки — как r^2, поэтому лёгкий шар обязан быть достаточно большим.

Ответ. 1) $\dfrac{4\pi r^2\sigma M_{\text{He}}}{M_{\text{B}}-M_{\text{He}}} < m < 4\pi r^2\left(\dfrac{p_0 M_{\text{B}} r}{3RT}-\sigma\right)$; 2) подъём возможен при $r > \dfrac{3RT\sigma}{p_0(M_{\text{B}}-M_{\text{He}})}$, при меньших r шар не взлетит ни при какой массе гелия.