Псевдоэксперимент «Вязкое трение»

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 4] «Псевдоэксперимент «Вязкое трение»».

Известно, что при падении бумажного конуса на него действует сила $F_{\text{сопр}}$ вязкого трения о воздух, зависящая от скорости движения конуса: $F_{\text{сопр}} = kv^n$. Изучите падение бумажного конуса при его разных массах и определите значение коэффициента n. Погрешность оценивать не нужно.

Примечание: если $F_{\text{сопр}} = kv^n$, то $\ln F_{\text{сопр}} = \ln k + n \ln v$.

Оборудование: два сборных фотодатчика, блок питания, электронные весы, USB-осциллограф, ноутбук, отвес, линейка, ножницы, клей, выкройка для конуса, пластилин, салфетка, миллиметровка. Расстояние между верхним лазером и плоскостью нижних лучей $L = 23{,}0 \pm 0{,}5$ см. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

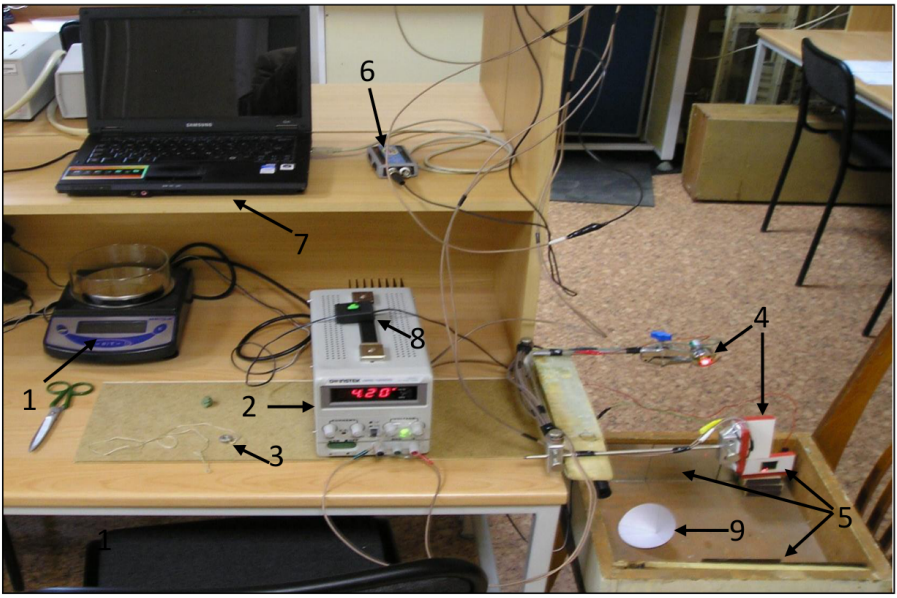


Рис. 1. Установка (фото из условия): 1 — весы, 2 — блок питания, 4 — верхний фотодатчик, 5 — нижний фотодатчик (ящик с зеркалами), 6 — USB-осциллограф, 7 — ноутбук, 9 — конус.

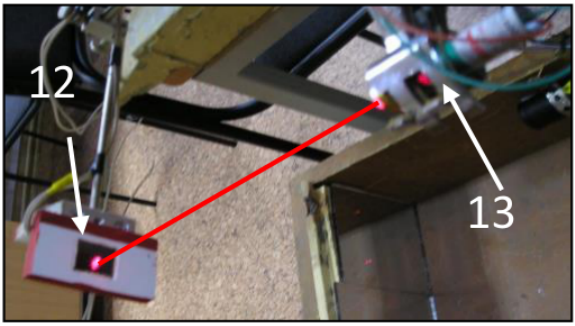


Рис. 2. Верхний фотодатчик (фото из условия): 13 — лазер, 12 — фотоэлемент.

Порядок измерений: конус с пластилином взвешивают; отпускают конус над верхним лазером на расстоянии 60–70 см; по осциллограмме определяют времена T_1, T_2, T_3, T_4, уровни U_0, U_1, U_2. Опыты повторяют с разными массами пластилина.

Таблица измерений (масса с пластилином m, мг; T_1, T_2, T_3, T_4, мс; U_0, U_1, U_2, В): 533: 161, 181, 372, 386; 600: 128, 143, 331, 341; 700: 192, 198, 372, 381; 790: 546, 552, 715, 723; 894: 133, 149, 289, 301; 990: 120, 131, 257, 277; 1125: 570, 576, 694, 709. Во всех опытах $U_0 = 0{,}450$ В.

▲ **Решение. Что происходит.** Конус отпускают высоко над датчиками, и к верхнему лучу он уже набрал установившуюся скорость: сила сопротивления растёт со скоростью и сравнялась с силой тяжести. Значит, в каждом опыте $F_{\text{сопр}} = mg$ — силу мы знаем по массе, а скорость измеряем временем пролёта между лучами. Меняя массу, получаем набор пар $(v;\, F)$. Степенная зависимость в логарифмах становится прямой, и n — её наклон. Это задача-псевдоэксперимент на линеаризацию.

Обозначения. v — установившаяся скорость, t — время пролёта между лучами, $L = 0{,}230$ м — расстояние между ними.

1. Сила сопротивления. На участке между датчиками движение равномерное, ускорение нулевое. Второй закон Ньютона для конуса в проекции на вертикаль (рис. 3):

$$mg - F_{\text{сопр}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\text{сопр}} = mg.$$

Сила Архимеда действует только на объём самой бумаги и пластилина (конус открыт снизу) — порядка 10^{-5} Н против $mg \sim 5 \cdot 10^{-3}$ Н, ею пренебрегаем.

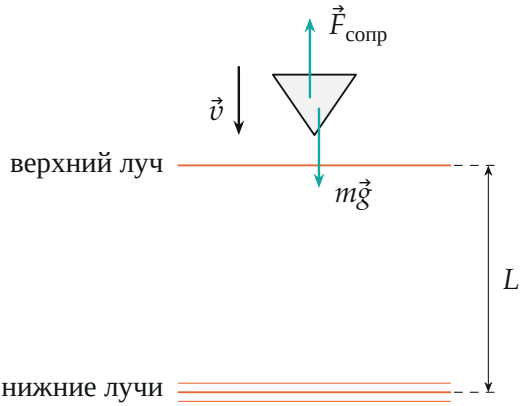


Рис. 3. Схема: конус падает с установившейся скоростью $\vec{v}$, сила сопротивления уравновешивает силу тяжести; лучи датчиков разнесены на L.

2. Какие времена брать. На осциллограмме два провала (рис. 4): T_1–T_2 — конус в верхнем луче, T_3–T_4 — в плоскости нижних лучей. Начало провала зависит от того, на каком расстоянии от оси конуса проходит луч: узкую вершину луч может «не заметить», и конус перекроет его, уже опустившись на неизвестную величину (рис. 5). Конец провала однозначен: луч освобождается, когда его проходит верхний (самый широкий) край конуса — при любом положении луча. Поэтому время пролёта между лучами

$$t = T_4 - T_2, \qquad v = \frac{L}{T_4 - T_2}.$$

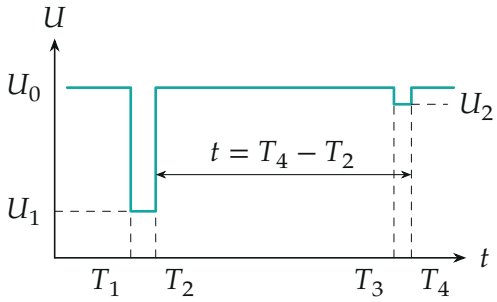


Рис. 4. Осциллограмма (по данным опыта $m = 533$ мг, уровни — схематично): провал при пролёте верхнего луча и провал при пролёте нижних лучей.

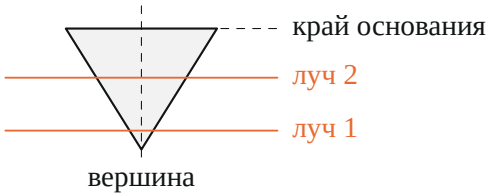


Рис. 5. Конус (вид сбоку) и два возможных положения луча относительно него: луч, прошедший у оси (1), конус перекрывает сразу вершиной, прошедший в стороне от оси (2) — только когда опустится широкая часть. Освобождается луч в обоих случаях, когда мимо проходит край основания.

3. Таблица. Для каждого опыта: $F = mg$, $v = L/(T_4 - T_2)$ и их логарифмы (F — в ньютонах, v — в м/с):

m, мг	T_2, мс	T_4, мс	t, мс	F, 10^{-3} Н	v, м/с	$\ln v$	$\ln F$
533	181	386	205	5,22	1,122	0,115	−5,25
600	143	341	198	5,88	1,162	0,150	−5,14
700	198	381	183	6,86	1,257	0,229	−4,98
790	552	723	171	7,74	1,345	0,296	−4,86
894	149	301	152	8,76	1,513	0,414	−4,74
990	131	277	146	9,70	1,575	0,454	−4,64
1125	576	709	133	11,03	1,729	0,548	−4,51

4. Линеаризация и наклон. Логарифмируем $F = kv^n$: $\ln F = \ln k + n \ln v$ — прямая в координатах $(\ln v;\ \ln F)$ с наклоном n (рис. 6). Метод

наименьших квадратов по семи точкам:

$$n = 1{,}64, \qquad \ln k = -5{,}39.$$

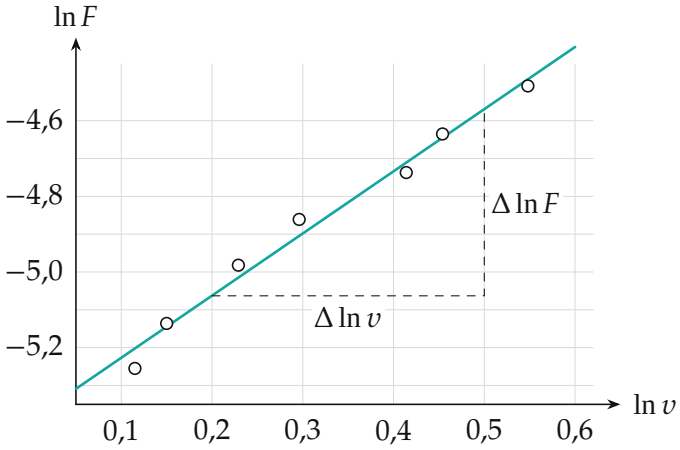


Рис. 6. Данные в логарифмических координатах ложатся на прямую; её наклон $\Delta \ln F / \Delta \ln v$ — показатель n.

Обратите внимание. Если взять времена начала провалов, $t = T_3 - T_1$, получится $n \approx 1{,}36$ — заметно другое число: начало перекрытия зависит от того, где луч прошёл вдоль конуса, и разброс времён портит наклон.

Проверка. n безразмерен, как и должно быть у показателя. По двум крайним точкам: $n = \dfrac{-4{,}51 - (-5{,}25)}{0{,}548 - 0{,}115} \approx 1{,}70$ — близко к наклону по всем точкам. Значение лежит между 1 (вязкое трение Стокса, малые скорости) и 2 (квадратичное сопротивление, большие скорости): при скоростях около 1 м/с и размере конуса в несколько сантиметров работают оба механизма, и показатель промежуточный. Смысл: конус вдвое большей массы падает не вдвое, а только в $2^{1/n} \approx 1{,}5$ раза быстрее.

Ответ. $n \approx 1{,}64$ (наклон прямой $\ln F_{\text{сопр}}$ от $\ln v$, где $F_{\text{сопр}} = mg$, $v = L/(T_4 - T_2)$).