Жёлоб

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 5] «Жёлоб».

Шарик движется по гладкому жёлобу, расположенному в вертикальной плоскости, из точки A без начальной скорости. Жёлоб соединяет фиксированную точку A, имеющую координаты $(r;\, r)$, с некоторой точкой B, лежащей на дуге окружности радиуса R с центром в точке $O\,(0;\, 0)$. При некотором положении точки B время движения шарика на участке AB оказывается минимально возможным (в процессе движения шарика точка B не перемещается). Определите, чему равно это минимальное время t. Ускорение свободного падения g.

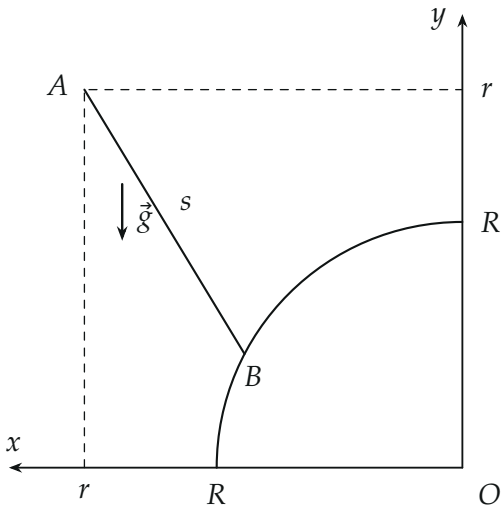


Рис. 1. Рисунок условия: ось x направлена влево, точка $A(r;\, r)$, дуга радиуса R, жёлоб AB длины s.

▲ **Решение. Что происходит.** По прямому гладкому жёлобу шарик скатывается равноускоренно, и чем круче жёлоб, тем больше ускорение, но тем длиннее путь до дуги (или короче — смотря куда он направлен). Перебирать углы и брать производную можно, но есть красивая идея: точки, до которых шарик доезжает за одно и то же время по всем жёлобам из A, лежат на окружности с верхней точкой A. Эта окружность

растёт со временем; первый момент, когда она коснётся дуги R, — и есть минимальное время. Это задача на равноускоренное движение по наклонной и геометрическое место точек (задача Галилея о хордах).

Обозначения. α — угол жёлоба с горизонтом, s — длина жёлоба, r_1 — радиус окружности равного времени, O_1 — её центр, C — её нижняя точка, $AC = 2r_1$ — диаметр.

1. Ускорение вдоль жёлоба. Второй закон Ньютона для шарика: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$. Ось τ — вдоль жёлоба вниз: на неё $\vec{N}$ проекции не даёт, и ускорение найдём сразу (рис. 2):

$$ma = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\alpha.$$

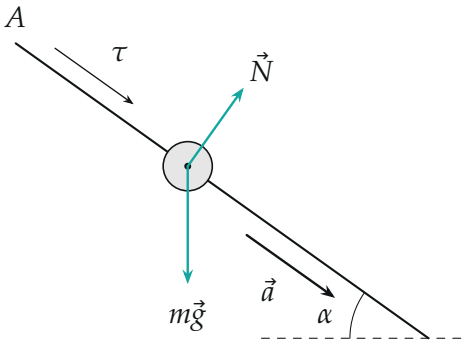


Рис. 2. Шарик на жёлобе: сила тяжести и нормальная реакция; ось τ вдоль жёлоба — реакция на неё не проецируется.

2. Путь за время t. Без начальной скорости $s = \dfrac{at^2}{2} = \dfrac{g\sin\alpha\, t^2}{2}$, то есть

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{gt^2}{2}$$

— одно и то же для всех жёлобов при заданном t.

3. Окружность равного времени. Проведём окружность с верхней точкой A и вертикальным диаметром $AC = 2r_1$. Возьмём любую её точку B_1 (рис. 3). Угол AB_1C прямой (вписанный, опирается на диаметр), а угол ACB_1 равен α — углу жёлоба AB_1 с горизонтом (стороны углов взаимно перпендикулярны). Из прямоугольного треугольника

AB_1C: $AB_1 = AC\sin\alpha$, то есть

$$\frac{AB_1}{\sin\alpha} = 2r_1.$$

Сравнив с шагом 2: шарик проходит любой жёлоб AB_1 за одно и то же время t, если

$$2r_1 = \frac{gt^2}{2}, \qquad r_1 = \frac{gt^2}{4}.$$

Через время t шарики на всех жёлобах из A — на этой окружности; с ростом t она раздувается вниз.

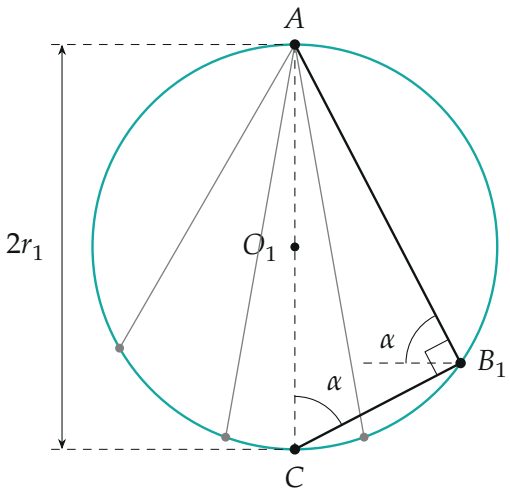


Рис. 3. Окружность равного времени: по любому жёлобу из A (серые и чёрный) шарик доезжает до неё за одно и то же время. Угол AB_1C прямой, угол ACB_1 равен углу жёлоба α.

4. Минимальное время — касание. Жёлоб кончается на дуге R. Пока окружность равного времени не дотянулась до дуги, ни один шарик дугу не достиг; в момент первого касания шарик, пущенный по жёлобу в точку касания B, приходит на дугу. Значит, минимальное время отвечает касанию окружности радиуса r_1 с дугой радиуса R — внешнему: точка O лежит вне окружности равного времени, дуга выпукла навстре-

чу ей (рис. 4). Центры и точка касания лежат на одной прямой, поэтому

$$OO_1 = R + r_1.$$

5. Расстояние OO_1 вторым способом. Центр O_1 — под точкой A на расстоянии r_1: $O_1(r;\, r - r_1)$. Теорема Пифагора:

$$OO_1^2 = r^2 + (r - r_1)^2.$$

Приравниваем:

$$(R + r_1)^2 = r^2 + (r - r_1)^2 \quad \Rightarrow \quad R^2 + 2Rr_1 = 2r^2 - 2rr_1,$$

$$r_1 = \frac{2r^2 - R^2}{2(r + R)}.$$

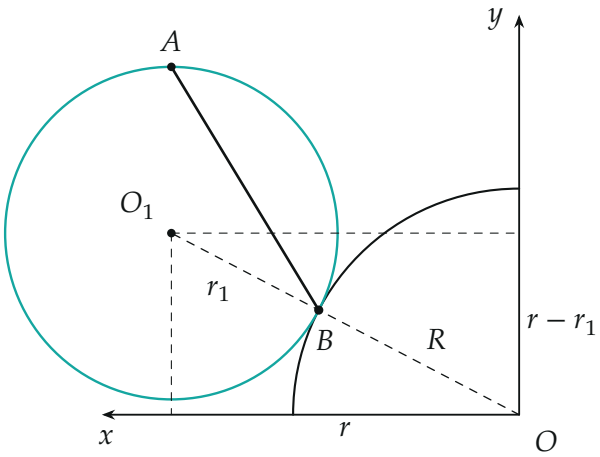


Рис. 4. Касание окружности равного времени (бирюзовая) с дугой R в точке B: $OO_1 = R + r_1$, а по катетам r и $r - r_1$ — теорема Пифагора. Жёлоб наименьшего времени — AB.

6. Ответ. Из шага 3 $t = \sqrt{4r_1/g}$:

$$t_{\min} = \sqrt{\frac{4r_1}{g}} = \sqrt{\frac{2\,(2r^2 - R^2)}{g\,(r + R)}}.$$

Формула верна при $R < r\sqrt{2}$ (точка A вне дуги, $r_1 > 0$); точка касания тогда всегда на четверти дуги: $r - r_1 = \dfrac{2rR + R^2}{2(r + R)} > 0$.

Обратите внимание. Самый короткий жёлоб (по прямой AO до дуги) — не самый быстрый: он пологий, $\alpha = 45°$. Самый быстрый ведёт в точку касания B и он круче — $59°$ при $R = 0{,}65\,r$ (рис. 4): выигрыш в ускорении важнее проигрыша в длине.

Проверка. Размерность: $\sqrt{\text{м}^2/(\text{м}/\text{с}^2 \cdot \text{м})} = \text{с}$. Предел $R \to 0$ (дуга стягивается в точку O): $t = \sqrt{4r/g}$, а прямой счёт для жёлоба AO длиной $r\sqrt{2}$ под $45°$ даёт $t^2 = \dfrac{2r\sqrt{2}}{g/\sqrt{2}} = \dfrac{4r}{g}$ — то же. Численный перебор точки B по дуге при $r = 1$ м, $R = 0{,}8$ м даёт минимум $t = 0{,}39268$ с, формула — $0{,}39268$ с (рис. 5). Смысл: время спуска по хордам окружности одинаково — поэтому вопрос «куда быстрее» решается касанием, без единой производной.

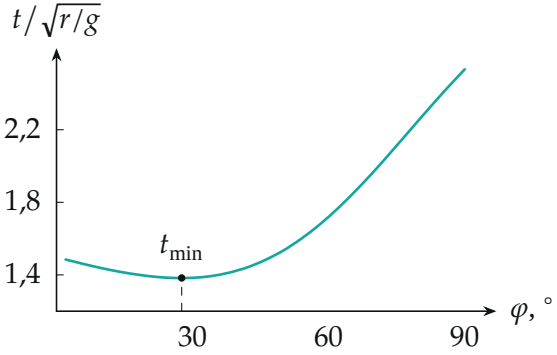


Рис. 5. Время спуска от положения точки B на дуге (φ — угол OB с осью x) при $R = 0{,}65\,r$, по вычисленным точкам. Минимум — при $\varphi = 27{,}6°$, в точке касания рис. 4; значение совпадает с формулой.

Ответ. $t_{\min} = \sqrt{\dfrac{2\,(2r^2 - R^2)}{g\,(r + R)}}$.