Разветвлённая цепь

Задача 6. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 6] «Разветвлённая цепь».

На рисунке представлена часть разветвлённой электрической цепи, включающей девять резисторов и идеальный амперметр. Сопротивления резисторов равны $R_1 = 1{,}0$ Ом, $R_2 = 2{,}0$ Ом, …, $R_9 = 9{,}0$ Ом (на рисунке приведены номера резисторов). Силы токов, протекающих через R_9 и амперметр, известны: $I_9 = 14$ А, $I_A = 4{,}5$ А, их направления указаны на рисунке. Определите силы токов, протекающих через резисторы R_7 и R_8, а также напряжение между точками A и B.

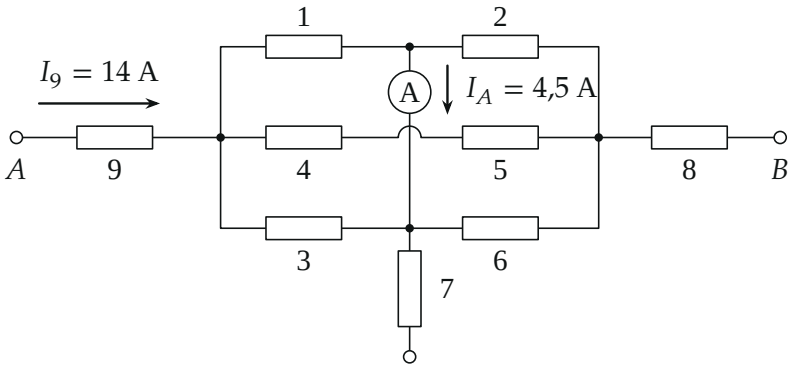


Рис. 1. Рисунок условия.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на правила Кирхгофа для разветвлённой цепи постоянного тока. Ключ — идеальный амперметр: его сопротивление равно нулю, поэтому напряжение на нём равно нулю и точки, к которым он подключён, имеют одинаковый потенциал. Значит, пары резисторов, начинающихся в одной точке и кончающихся на концах амперметра, находятся под одним напряжением — их токи связаны просто отношением сопротивлений. Дальше остаются уравнения для узлов (заряд в узле не накапливается) и одно уравнение для напряжений.

Обозначения. Узлы: P — после R_9, C и D — верхний и нижний концы амперметра, Q — перед R_8 (рис. 2). I_k — ток через резистор R_k; направления выбираем «слева направо» и «вниз» по рис. 2; получится ток отрицательным — значит, он течёт в другую сторону. Резисторы R_4 и

R_5 соединены последовательно (средний провод перепрыгивает через провод амперметра, не касаясь его), ток в них один — I_4.

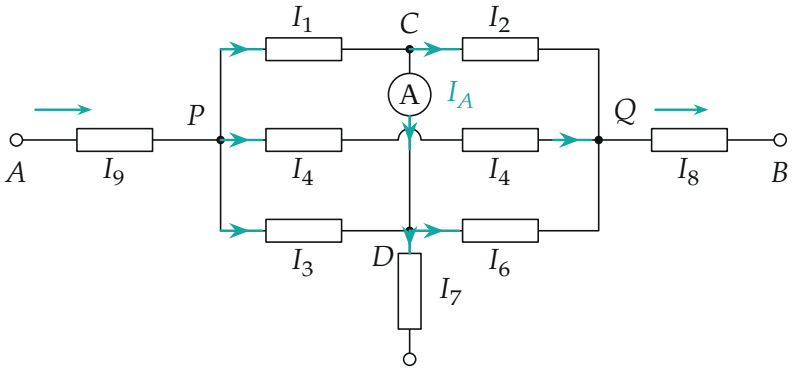


Рис. 2. Узлы и выбранные направления токов (бирюзовые стрелки на проводах); у каждого резистора — ток через него.

1. Амперметр соединяет точки одного потенциала. Напряжение на идеальном амперметре $U_A = I_A \cdot 0 = 0$, значит $\varphi_C = \varphi_D$. Мысленно сожмём C и D в одну точку O (рис. 3): резисторы R_1 и R_3 включены параллельно между P и O, а R_2 и R_6 — параллельно между O и Q. Закон Ома для каждой пары — напряжения одинаковы:

$$I_1R_1 = I_3R_3 \Rightarrow I_1 = \frac{R_3}{R_1} I_3 = 3I_3, \qquad I_2R_2 = I_6R_6 \Rightarrow I_2 = \frac{R_6}{R_2} I_6 = 3I_6.$$

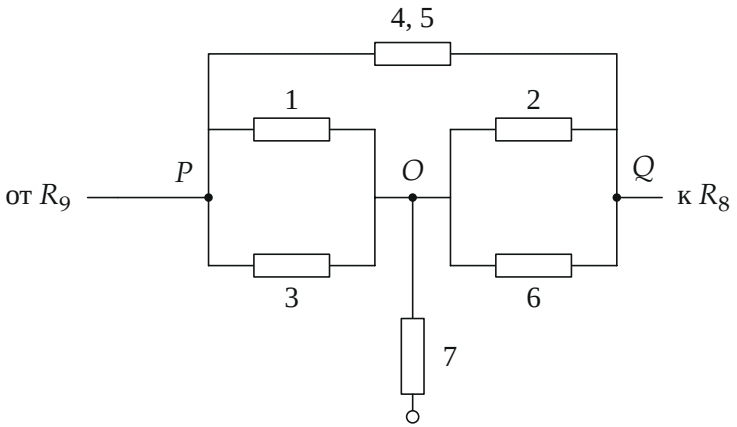


Рис. 3. Та же цепь, если сжать концы амперметра C и D в одну точку O: видно, что $R_1 \parallel R_3$ и $R_2 \parallel R_6$.

2. Ток I_7 — из уравнений узлов. Первое правило Кирхгофа (сколько втекает в узел, столько вытекает) для узла C: в него втекает I_1, вытекают I_2 и I_A; для узла D: втекают I_3 и I_A, вытекают I_6 и I_7:

$$I_1 = I_2 + I_A, \qquad I_3 + I_A = I_6 + I_7.$$

Подставим $I_1 = 3I_3$, $I_2 = 3I_6$ в первое: $3(I_3 - I_6) = I_A$, т. е. $I_3 - I_6 = I_A/3$. Тогда из второго

$$I_7 = (I_3 - I_6) + I_A = \frac{I_A}{3} + I_A = \frac{4}{3} I_A = \frac{4}{3} \cdot 4{,}5\ \text{А} = 6\ \text{А}.$$

Знак плюс: ток через R_7 течёт вниз, из цепи наружу.

3. Ток I_8. Весь участок между P и Q вместе с R_7 — это «узел в широком смысле»: в него втекает I_9, вытекают I_7 (вниз) и I_8 (вправо). Заряд внутри не копится:

$$I_8 = I_9 - I_7 = 14\ \text{А} - 6\ \text{А} = 8\ \text{А}.$$

4. Ток через R_4 и R_5. Для узла P: $I_9 = I_1 + I_4 + I_3 = 4I_3 + I_4$. Второе правило Кирхгофа для контура $P \to C \to Q$ через R_1, R_2 и обратно через R_5, R_4: напряжение между P и Q одно и то же по обоим путям,

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = I_4 (R_4 + R_5) \quad \Rightarrow \quad 3I_3 + 2(3I_3 - I_A) = 9I_4,$$

где $I_2 = I_1 - I_A = 3I_3 - I_A$. Получаем систему

$$\begin{cases} 4I_3 + I_4 = 14\ \text{А}, \\ 9I_3 - 9\ \text{А} = 9I_4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad I_4 = I_3 - 1\ \text{А}, \quad 5I_3 = 15\ \text{А},$$

откуда $I_3 = 3$ А, $I_4 = 2$ А. Остальные токи: $I_1 = 9$ А, $I_2 = 4{,}5$ А, $I_6 = I_3 - I_A/3 = 1{,}5$ А (рис. 4).

5. Напряжение U_{AB}. Идём от A к B по пути $R_9 \to R_4 \to R_5 \to R_8$, складывая напряжения на резисторах по закону Ома (все токи на этом

пути направлены от A к B):

$$U_{AB} = I_9R_9+I_4(R_4+R_5)+I_8R_8 = 14\cdot9+2\cdot9+8\cdot8 = 126+18+64 = 208\,\text{В}.$$

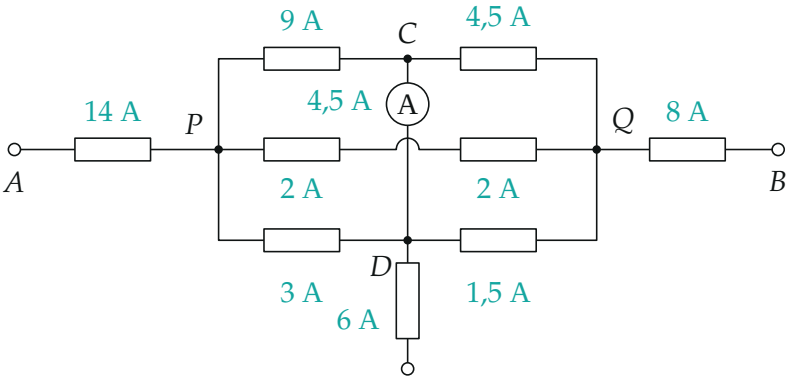


Рис. 4. Найденные токи (бирюзой — значения, направления как на рис. 2).

Обратите внимание. Ток I_7 не зависит от I_9: он определяется только током амперметра и отношениями $R_3/R_1 = R_6/R_2 = 3$. Без этих отношений пришлось бы решать полную систему.

Ответ.

$$I_7 = \frac{4}{3}I_A = 6\ \text{А}, \qquad I_8 = I_9 - \frac{4}{3}I_A = 8\ \text{А},$$
$$U_{AB} = I_9R_9 + I_4(R_4 + R_5) + I_8R_8 = 208\ \text{В}.$$

Проверка. Узел Q: втекают $I_2 + I_4 + I_6 = 4{,}5 + 2 + 1{,}5 = 8\ \text{А} = I_8$ — сходится. Второй путь для напряжения: $P \to D \to Q$ через R_3 и R_6 даёт $3\cdot3+1{,}5\cdot6 = 18\,\text{В}$, через R_4, R_5 — $2\cdot9 = 18\,\text{В}$, то же. Размерность: А·Ом = В. Через R_7 уходит меньше половины входящего тока, остальное идёт к B — разумно: R_7 лишь «отводит» ток из точки O.

Ответ. $I_7 = 6$ А (вниз); $I_8 = 8$ А; $U_{AB} = 208$ В.