На складе

Задача 7. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 7] «На складе».

На территории промышленного объекта, обнесённой забором $FGHE$, расположен пост охраны (точка O) и склад $ABCD$. Охранники жаловались, что с поста им не видно сторон склада AB и AD. Для решения проблемы было решено установить плоские зеркала. Так как по территории объекта постоянно передвигается тяжёлая техника, то зеркала можно вешать только на забор или на стены склада. При этом плоскость зеркала должна совпадать с плоскостью стены/склада. Схема территории приведена на рисунке. Размер одной клеточки равен 10 м.

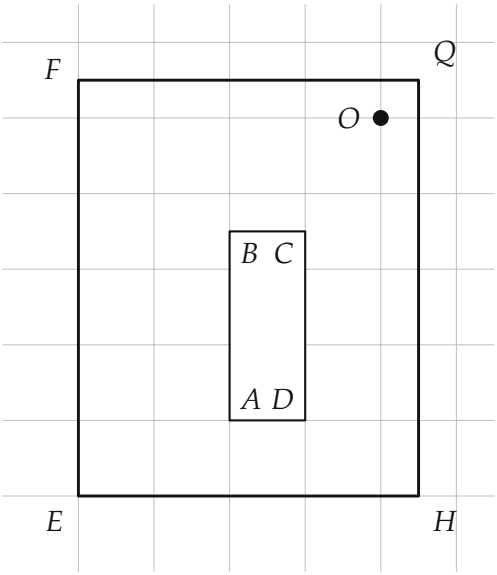


Рис. 1. Рисунок условия.

1. Укажите, где нужно разместить плоское зеркало, чтобы с поста охраны была видна вся стена AB склада. Построениями докажите, что в зеркале будет видна вся стена AB.
2. Укажите минимально возможную ширину зеркала для пункта 1 и где оно должно располагаться. Свои выводы подкрепите построениями и рассуждениями.

3. Возможно ли расположить на стене EH одно зеркало так, чтобы с поста охраны в него была видна вся стена AD? Свой ответ подкрепите построениями и рассуждениями.
4. Нарисуйте схему расположения зеркал, с помощью которой охрана будет видеть всю стену склада AD. Используйте минимальное количество зеркал. Построениями докажите, что в зеркалах будет видна вся стена AD.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на построение изображений в плоском зеркале. Главный приём: изображение предмета в плоском зеркале симметрично предмету относительно плоскости зеркала, и все отражённые лучи идут так, будто вышли из изображения. Поэтому вместо ломаного луча «стена — зеркало — пост» рисуем прямую «изображение стены — пост»: точка, где эта прямая пересекает забор, — место на зеркале, а прямая должна по пути не задевать склад. При нескольких отражениях отражаем не предмет, а пост — «разворачиваем» ломаный луч в прямую.

Обозначения. Введём координаты в клетках (1 клетка = 10 м): начало в углу E, ось x — вдоль EH, ось y — вдоль EF. Тогда $E(0;0)$, $H(9;0)$, $Q(9;11)$, $F(0;11)$, склад: $A(4;2)$, $B(4;7)$, $C(6;7)$, $D(6;2)$, пост $O(8;10)$. Стена AB смотрит на забор EF, стена AD — на забор EH; с поста видны только стены BC и CD.

Пункты 1 и 2.

1. Где зеркало. Стена AB обращена к забору EF — только в зеркале на EF её лучи могут повернуть к посту. Построим изображение стены в зеркале $x = 0$: точки симметричны относительно плоскости зеркала,

$$A_1(-4;2), \qquad B_1(-4;7).$$

Отражённый луч от любой точки стены идёт к посту по прямой «изображение точки — O». Крайние лучи A_1O и B_1O пересекают забор $x = 0$ в точках Z_1 и Z_2 (рис. 2), все остальные лучи от стены лежат между ними.

2. Границы зеркала. Прямая A_1O поднимается на $10 - 2 = 8$ клеток

при сдвиге на $8-(-4)=12$ клеток; до забора от A_1 — 4 клетки по x:

$$y_{Z_1}=2+8\cdot\frac{4}{12}=4\tfrac{2}{3},\qquad y_{Z_2}=7+3\cdot\frac{4}{12}=8.$$

То же — из подобия треугольников OA_1B_1 и OZ_1Z_2: их стороны Z_1Z_2 и A_1B_1 параллельны, и отношение сторон равно отношению расстояний от O до них, $OG_1=8$ и $OG_2=12$ клеток:

$$Z_1Z_2=A_1B_1\cdot\frac{OG_1}{OG_2}=50\text{ м}\cdot\frac{8}{12}=\frac{100}{3}\text{ м}\approx 33{,}3\text{ м}.$$

Проверим, что лучи свободны. Отрезок Z_1O идёт с наклоном $\frac{10-4{,}67}{8}=\frac{2}{3}$; над стеной AB ($x=4$) он на высоте $7{,}33>7$, над углом C ($x=6$) — на высоте $8{,}67>7$: склад луч не задевает. Отрезки от стены до зеркала лежат левее склада, где ничего нет. Значит, зеркало на заборе EF шириной 33,3 м от 46,7 м до 80 м от угла E (от 30 м до 63,3 м от F) показывает всю стену AB; меньшее зеркало потеряет край A или край B.

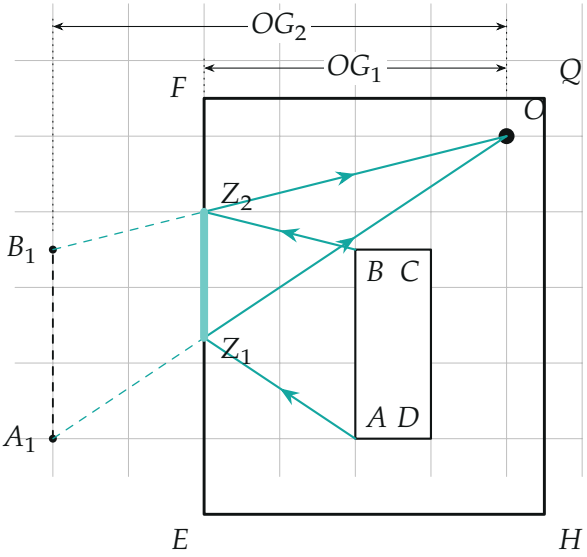


Рис. 2. Пункты 1, 2: изображение A_1B_1 стены в зеркале на EF, крайние лучи

(бирюза, пунктир — их продолжения за зеркало) и нужная часть зеркала Z_1Z_2 (широкая полоса).

Пункт 3.

3. Одно зеркало на EH**.** Изображение стены AD в зеркале $y = 0$ — отрезок $A'(4;-2)$, $D'(6;-2)$. Точка стены видна, если прямая от её изображения к O не проходит сквозь склад. Для точки $(p;2)$ стены прямая к $O(8;10)$ пересекает линию $y = 2$ (продолжение стены AD) при

$$x = 8 - (8-p)\cdot\frac{10-2}{10-(-2)} = 8 - \frac{2}{3}(8-p).$$

Луч проходит мимо угла D, только если $x \geq 6$, т. е. $p \geq 5$. Видна лишь правая половина стены SD, где $S(5;2)$ — середина AD; луч от изображения A' упирается в стену CD склада в точке $(6;4)$ (красный на рис. 3). Где бы ни висело зеркало на EH, изображение одно и то же — значит, **одного зеркала на** EH **недостаточно**.

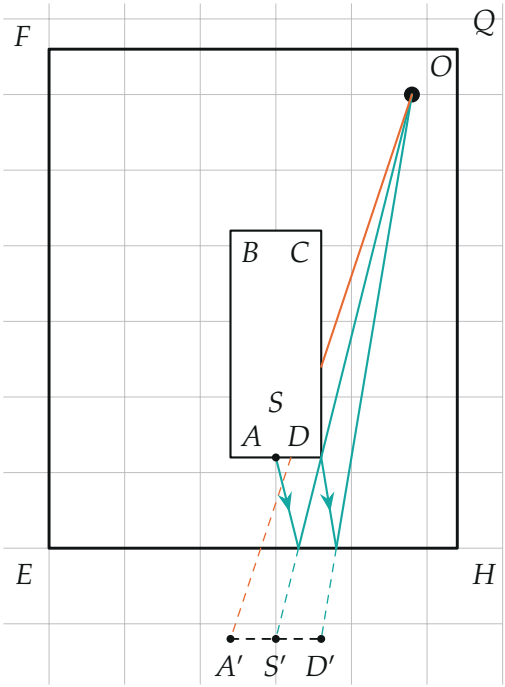


Рис. 3. Пункт 3: в зеркале на EH видна только часть SD; луч к изображению точки A (красный) перекрывает угол D склада.

Пункт 4.

4. Второе зеркало на заборе QH**.** Половину SD уже показывает зеркало на EH. Для половины AS луч должен обойти угол D справа: отражаемся от EH, затем от зеркала на QH ($x = 9$), и только потом к посту. Чтобы найти ход такого луча, «разворачиваем» его: отражаем пост в QH — $O'(10;10)$, затем в EH — $O''(10;-10)$. Луч из точки $(p;2)$ стены после двух отражений приходит в O тогда и только тогда, когда прямая от $(p;2)$ к O'' пересекает сначала EH, а потом QH (рис. 5). Точки отражения:

$$x_{EH} = p + \frac{10-p}{6}, \qquad y_{QH} = \frac{12(9-p)}{10-p} - 2.$$

Для A ($p = 4$): $x_{EH} = 5$, $y_{QH} = 8$; для S ($p = 5$): $x_{EH} = 5{,}83$, $y_{QH} = 7{,}6$. Участок луча от EH к QH на высоте стены ($y = 2$) идёт при $x = p + \frac{10-p}{3} \geq 6$ — правее угла D (для самой точки A — ровно по углу), а от QH к посту луч проходит выше склада. Ход лучей — на рис. 4.

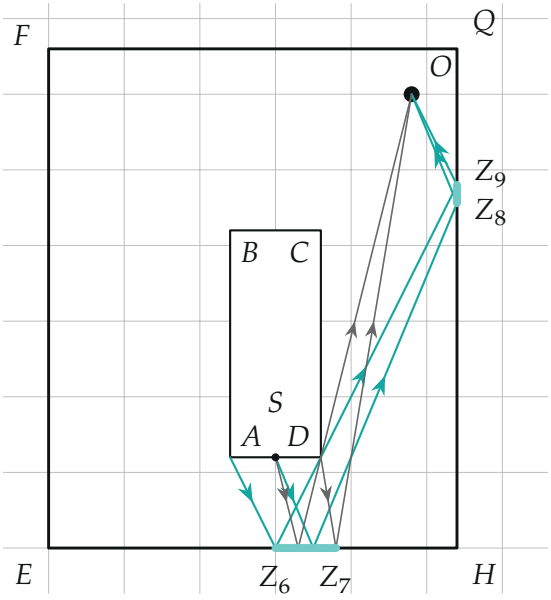


Рис. 4. Пункт 4: лучи от A и S идут через зеркала Z_6Z_7 на EH и Z_8Z_9 на QH (бирюза), лучи от S и D — через одно зеркало на EH (серые).

Итак, зеркала: на EH — от $x = 5$ до $x = 8 - \frac{2 \cdot 10}{12} = 6\frac{1}{3}$ клетки, т. е. от 50 м до 63,3 м от угла E (оно обслуживает и прямые отражения части SD, и первые отражения части AS); на QH — от 76 м до 80 м от угла H. Одного зеркала мало (пункт 3), поэтому два — минимум.

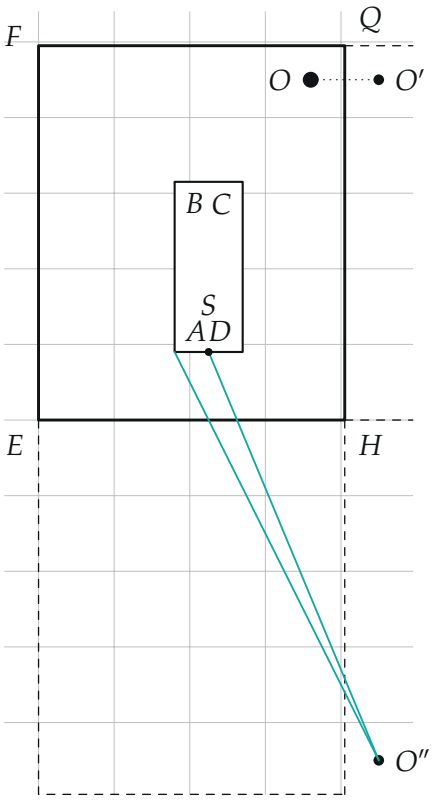


Рис. 5. «Развёртка»: вместо двух отражений луча отражаем пост — в QH (O'), затем в EH (O''); луч становится прямой от стены к O''.

Обратите внимание. Есть и второй вариант пункта 4 (его предлагают организаторы): второе зеркало вешают на саму стену AD на участке SD, и луч от части AS идёт «EH — стена — EH». Но тогда часть SD закрыта зеркалом, и сама стена там не видна; вариант с забором QH этого недостатка не имеет.

Ответ. 1) Зеркало на заборе EF. 2) Минимальная ширина $Z_1Z_2 = A_1B_1 \cdot \frac{OG_1}{OG_2} = \frac{100}{3}$ м $\approx 33{,}3$ м, от 46,7 м до 80 м от угла E. 3) Нет: видна только половина SD, угол D закрывает остальное. 4) Два зеркала: на EH (от 50 до 63,3 м от E) и на QH (от 76 до 80 м от H).

Проверка. Ширина зеркала меньше стены ($33{,}3 < 50$ м), как и должно быть: пост ближе к забору, чем изображение стены ($8 < 12$ клеток). Предел: если бы пост стоял на самом заборе, зеркало сжалось бы в точку. В пункте 3 граница $p = 5$ проверена и через подобие: луч от D' ($p = 6$) проходит у D с запасом $\frac{2}{3}$ клетки, а запас убывает на $\frac{2}{3}$ на клетку p — обнуляется при $p = 5$.

Ответ. 1) на заборе EF; 2) 33,3 м, от 46,7 м до 80 м от угла E; 3) нет, видна лишь половина SD стены; 4) два зеркала: на заборе EH (от 50 до 63,3 м от E) и на заборе QH (от 76 до 80 м от H); возможен вариант второго зеркала на участке SD стены склада.