Гидростатический «серый ящик»

Задача 8. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 10 класс, задача 8] «Гидростатический „серый ящик“».

Внутри «серого ящика» в форме прямоугольного параллелепипеда имеются тонкие перегородки, которые могут быть расположены только по пунктирным линиям (см. рисунки) перпендикулярно боковым стенкам ящика (боковыми называются стенки, на которых нарисована стрелка). Перегородки могут начинаться и заканчиваться либо на стенках «серого ящика», либо в точках пересечения пунктирных линий. Перегородки полностью перекрывают расстояние между боковыми стенками и непроницаемы как для воды, так и для воздуха. С помощью имеющегося оборудования определите расположение перегородок и их размеры. Толщиной перегородок и стенок можно пренебречь. Оценивать погрешность не нужно.

Оборудование: «серый ящик», шприц с иглой, полоска миллиметровой бумаги, стакан с жидкостью, пустой стакан, ножницы, скотч. Серый ящик — квадратная коробочка с отверстиями А и Б; в отверстие Б вставлена трубочка, которую можно поворачивать в положение 1 или 2.

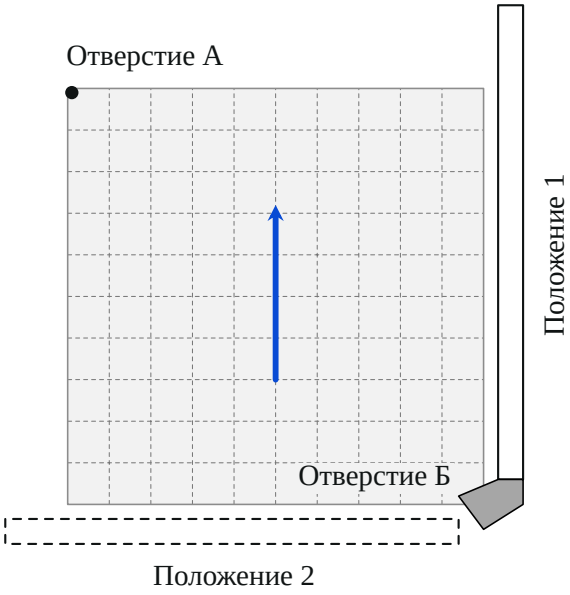


Рис. 1. Рисунок условия: боковая стенка коробочки с пунктирной сеткой, отверстия А и Б, трубочка в положении 1 (сплошная) и 2 (пунктир).

Результаты измерений: размеры коробочки 100 × 100 × 10 мм; расстояния между пунктирными линиями и от них до стенок равны 10 мм; внешний диаметр трубки определён по намотанной бумаге (8,9 см на два оборота); внутренняя площадь сечения трубки $S_{тр} = 1{,}0\ см^2$ (по объёму 8 мл, занимающему 8,0 см трубки). Опыты 4 и 5 — стрелка вверх, жидкость заливают через А (опыт 4) и через низ трубочки у Б (опыт 5); опыты 6 и 7 — то же при стрелке вправо и трубочке в положении 2. Таблица измерений $h(V)$ для опытов 4–7 (уровень h в трубочке, объёмы V_4–V_7):

h, мм	V_4, мл	V_5, мл	V_6, мл	V_7, мл
0	0–9	0	0–10	0
5	11	2	15	6
10	13	4	21	11
15	15	6	26	17
20	17	8	32	22
25	19	10	38	28
30	21	12–21	43	33
35	25	25	46	36
40	28	28	49	39
45	31	31	52	42
50	35	35	55	45–55
55	37	37	56	56
60	38	39	58	58
65	40	41	59	60
70	44–71	43–71	61	61
75	75	75	62	62
80	79	79	64	63
85	83	83	66	65
90	87	87	67	67
95	91	91	68	68
100	95	95	70	70

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача-«серый ящик» на гидростати-

ку сообщающихся сосудов. Трубочка у отверстия Б — манометр: уровень h в ней равен уровню жидкости в той части коробочки, которая сообщается с атмосферой. Наклон графика «объём — уровень» даёт площадь, которую жидкость заполняет на данной высоте, а горизонтальные участки (уровень стоит, объём растёт) — полости, которые заполняются переливом через верх перегородки. Ещё одна важная вещь — воздух: перегородки непроницаемы, и если жидкость закрыла единственный выход из полости, воздух в ней заперт и жидкость туда больше не идёт.

Обозначения. Толщина коробочки $d = 1$ см, поэтому одна клетка сетки 1×1 см — это объём 1 мл на сантиметр высоты: площадь в см^2 на данной высоте равна числу заполняемых клеток в ряду. $V_{эф} = V - S_{тр}h$ — объём жидкости в самой коробочке. Клетки нумеруем координатами $(x; y)$ в сантиметрах от левого нижнего угла при стрелке вверх; отверстие А — в углу $(0; 10)$, Б — в углу $(10; 0)$.

1. Поправка на трубочку. Из опыта 3 площадь сечения трубочки $S_{тр} = \frac{8\text{ мл}}{8{,}0\text{ см}} = 1{,}0$ см^2: при уровне 10 см в трубочке стоит 10 мл — заметная доля залитого. Вычтем из каждого объёма $S_{тр}h$. Например, при $h = 50$ мм в опыте 4: $V_{эф} = 35 - 1{,}0 \cdot 5{,}0 = 30$ мл. Площадь заполнения на участке

$$S = \frac{\Delta V_{эф}}{\Delta h}.$$

2. Опыты 4 и 5 (стрелка вверх). Графики $V_{эф}(h)$ — на рис. 2. Участки и их смысл:

- через А первые 9 мл уходят при $h = 0$: жидкость падает в полость, не сообщающуюся с трубочкой снизу, — полость объёмом 9 мл;
- 0–30 мм: $S = \frac{18-9}{3} = 3$ см^2 (опыт 4) и $\frac{9-0}{3} = 3$ см^2 (опыт 5) — у отверстия Б заполняется полоса шириной 3 клетки;
- в опыте 5 при $h = 30$ мм уровень стоит, пока не войдут 9 мл: та же полость 9 мл заполняется переливом через перегородку высотой 30 мм. Полость рядом с полосой у Б, высота 3 клетки, объём 9 клеток — это квадрат 3×3: клетки $4 < x < 7$, $0 < y < 3$, перегородки $x = 4$ (снизу до $y \geq 3$) и $x = 7$ от 0 до 3. Полоса у Б — $7 < x < 10$;
- 30–50 мм: $S = \frac{30-18}{2} = 6$ см^2 — над перегородкой $x = 7$ полосы объединились, $4 < x < 10$;

- 50–70 мм: $S = \frac{36-30}{2} = 3$ см^2 — заполняется вдвое меньше;
- 70 мм: уровень стоит, пока входит $64 - 36 = 28$ мл — перелив в полость объёмом ≈ 28 мл через перегородку высотой 70 мм;
- 70–100 мм: $S = \frac{85-64}{3} = 7$ см^2, всего в коробочку входит 85 мл, хотя её объём 100 мл: 15 мл заняты запертым воздухом.

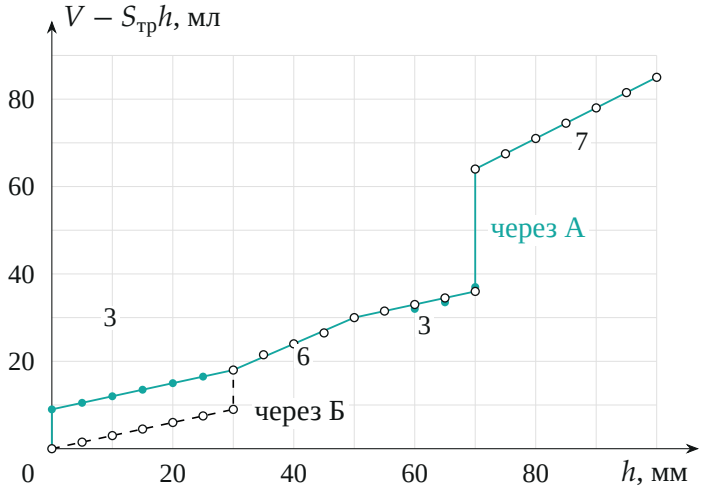


Рис. 2. Опыты 4 и 5: объём жидкости в коробочке $V_{эф} = V - S_{тр}h$ от уровня. Бирюза — через А, кружки — через Б; линии — расчёт для найденных перегородок, цифры — площадь S в см^2.

3. Откуда 15 мл воздуха и почему с 50 мм площадь падает. Полоса у Б ($7 < x < 10$) — правая часть коробочки, сверху она закрыта стенкой коробочки, выхода наверху нет. Если на высоте $y = 5$ её отделяет от остальной коробочки вертикальная перегородка $x = 7$ от $y = 5$ до верха, то, как только уровень дошёл до 50 мм, воздух в правом верхнем углу $3 \times 5 = 15$ мл заперт — и с 50 мм площадь падает с 6 до 3 см^2, а полный объём уменьшается ровно на 15 мл: $100 - 15 = 85$ — оба факта сходятся. Значит, выше 50 мм заполняется полоса $4 < x < 7$, а левее $x = 4$ перегородка поднимается до 70 мм: за ней полость $4 \times 7 = 28$ мл, которую заполняет перелив при $h = 70$ мм. Над 70 мм заполняется 7 клеток — вся ширина левее $x = 7$.

4. Опыты 6 и 7 (стрелка вправо). Коробочку повернули по часовой стрелке: А теперь в правом верхнем углу, Б с трубочкой — в левом нижнем. По рис. 3:

- через А первые 10 мл — полость 10 мл, которая через Б заполняется переливом при $h = 50$ мм (участок 45–55 мл в опыте 7);
- 0–30 мм: $S = \frac{40-10}{3} = 10$ см^2 — заполняется вся ширина, вертикальных (в этом положении) перегородок внизу нет;
- 30–50 мм: $S = 5$ см^2; при $h = 50$ мм в коробочке 50 мл в обоих опытах — заполнена вся нижняя половина;
- 50–100 мм: $S = 2$ см^2, полный объём 60 мл — 40 мл занимает запертый воздух в верхней половине.

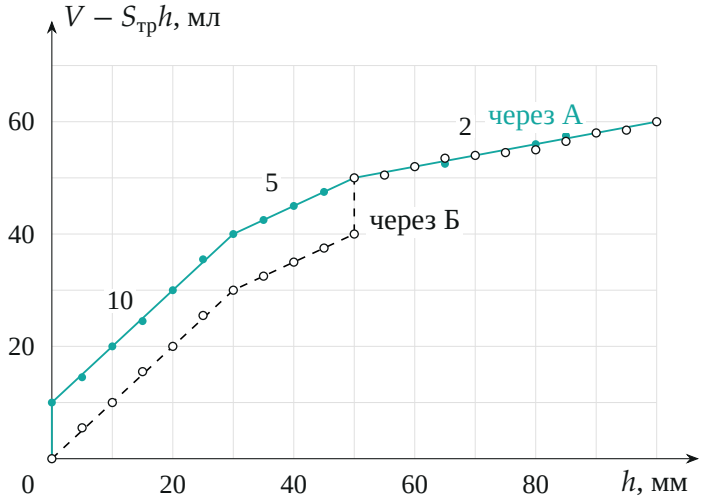


Рис. 3. Опыты 6 и 7 (стрелка вправо): бирюза — через А, кружки — через Б; линии — расчёт для найденных перегородок.

5. Сводим вместе. В повёрнутой коробочке полость 10 мл лежит на высоте 30–50 мм и обязана заполняться первой из А, а в той же полосе снизу заполняются лишь 5 клеток. Единственный вариант — «полка» длиной 5 клеток под отверстием А с бортиком высотой 2 клетки: в положении «стрелка вверх» это перегородка $x = 7$ от $y = 5$ до 10 (та самая, что запирает 15 мл) и бортик $y = 5$ от $x = 5$ до $x = 7$. Нижняя

половина в повёрнутом положении — это левая половина при стрелке вверх; чтобы там при $h = 50$ мм было 50 мл, перегородка $x = 4$ должна кончаться на $y = 7$, а сверху левую часть закрывает горизонтальная перегородка $y = 8$ от $x = 0$ до $x = 5$. Она же не даёт жидкости из А сразу падать в левую полость (иначе первые 9 мл в опыте 4 не попали бы в квадрат 3×3), а в повёрнутом положении запирает воздух 40 мл: верхняя половина над полкой отделена ею и перегородкой $x = 4$ (теперь горизонтальной). Итоговая схема — на рис. 4 (стрелка вверх) и рис. 5 (стрелка вправо). Перегородки (в см, стрелка вверх):

$$x = 4,\ 0 \le y \le 7; \qquad x = 7,\ 0 \le y \le 3; \qquad x = 7,\ 5 \le y \le 10;$$
$$y = 5,\ 5 \le x \le 7; \qquad y = 8,\ 0 \le x \le 5.$$

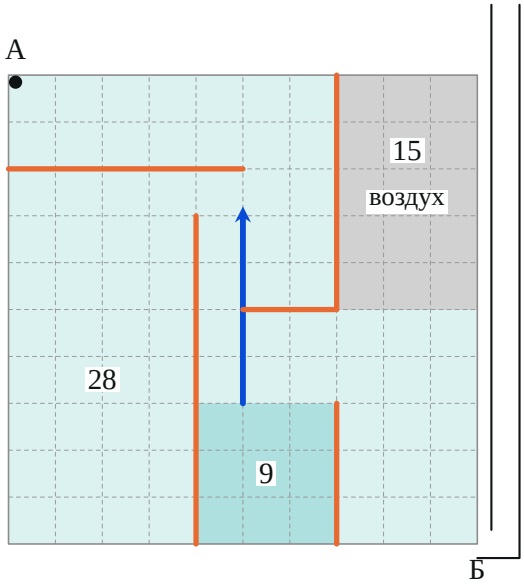


Рис. 4. Найденные перегородки (красные), стрелка вверх. Цифры — объёмы полостей в мл; тёмно-бирюзовая — полость 9 мл у Б, серая — запертый воздух 15 мл.

6. Проверка схемы на всех опытах. Стрелка вверх, через А: жидкость падает с полки $y = 8$ в полосу $4 < x < 7$, на дно квадрата 3×3

— 9 мл при $h = 0$; переливается через $x = 7$ ($y = 3$) к Б — 3 клетки до 30 мм; затем 6 клеток до 50 мм; воздух справа заперт — 3 клетки до 70 мм; перелив через верх перегородки $x = 4$ в левую полость 28 мл; дальше 7 клеток до верха. Итого $9 + 9 + 12 + 6 + 28 + 21 = 85$ мл. Через Б — то же, только квадрат 9 мл заполняется переливом при 30 мм. Стрелка вправо (рис. 5): через А сначала полка $5 \times 2 = 10$ мл, потом вся ширина 10 клеток до 30 мм, 5 клеток до 50 мм, после чего воздух над полкой заперт ($8 \times 5 = 40$ мл) и заполняется лишь колонка 2 клетки под А: $10 + 30 + 10 + 10 = 60$ мл. Через Б — то же, полка заполняется переливом при 50 мм. Расчётные линии рис. 2 и 3 проходят через все точки таблицы с точностью 1–2 мл.

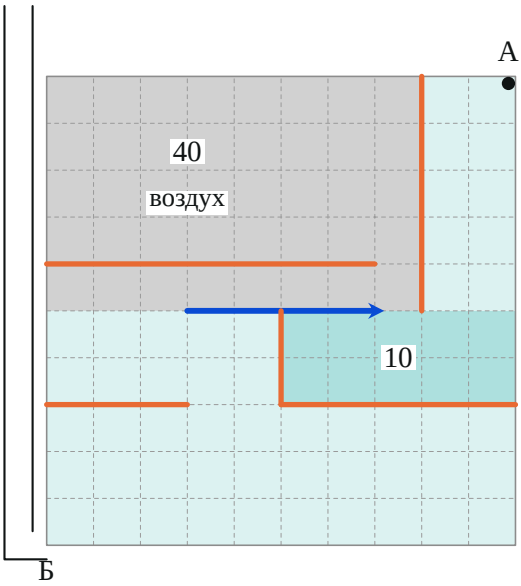


Рис. 5. Та же коробочка стрелкой вправо (трубочка в положении 2): полка 10 мл под отверстием А и запертый воздух 40 мл.

Обратите внимание. Без поправки на трубочку площади выходят на 1 см^2 больше (4, 7, 4, 8 вместо 3, 6, 3, 7), и схема не собирается. И второе: запертый воздух — такая же «перегородка», как стенка: полость 15 мл и 40 мл не заполняются, хотя жидкость к ним подходит.

Ответ. Перегородки (стрелка вверх, начало координат в левом нижнем углу, клетка 1 см): вертикальные $x = 4$ см от дна до 7 см, $x = 7$ см от дна до 3 см и от 5 см до верха; горизонтальные $y = 5$ см от $x = 5$ до 7 см и $y = 8$ см от левой стенки до $x = 5$ см (рис. 4).

Проверка. Размерность: $\frac{\Delta V}{\Delta h}$ — мл/см = см^2. Сумма полостей при стрелке вверх 85 мл и при стрелке вправо 60 мл совпадает с конечными точками таблицы (95 – 10 и 70 – 10 мл). Объём воздуха 15 и 40 мл даёт 100 мл в сумме с заполненным — вся коробочка учтена.

Ответ. Перегородки (стрелка вверх; x — от левой стенки, y — от дна, в см): $x = 4$, $0 \le y \le 7$; $x = 7$, $0 \le y \le 3$; $x = 7$, $5 \le y \le 10$; $y = 5$, $5 \le x \le 7$; $y = 8$, $0 \le x \le 5$. Полости: 9 мл у Б (перегородка 30 мм), 28 мл слева (перелив при 70 мм), 10 мл — полка под А; вмещает 85 мл (стрелка вверх) и 60 мл (стрелка вправо).