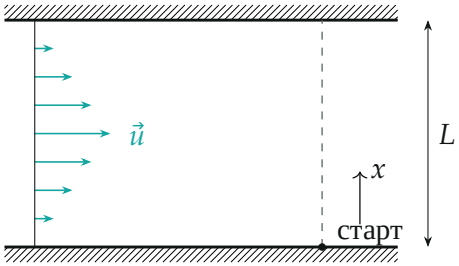
Переправа

Задача 1. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 1] Лодка переплывает реку по прямой, перпендикулярной берегам. Её скорость относительно воды равна v_0. До середины реки скорость течения изменяется по закону $u = \alpha x$ от нуля до $v_0/2$ — скорости воды на середине реки, где α — известный коэффициент, x — расстояние от берега. После середины реки скорость уменьшается до нуля у другого берега по тому же закону.

Определите зависимость от времени угла между вектором скорости лодки относительно воды и направлением движения относительно берега. Через какое время лодка окажется на другом берегу?



Поясняющий рисунок: профиль скорости течения (длины стрелок — по закону $u = \alpha x$ и симметрично), путь лодки — пунктир поперёк реки

▲ **Решение.** **Что происходит.** Лодка идёт строго поперёк, поэтому её скорость относительно воды $\vec{v}_0$ должна гасить течение: нос повёрнут против течения на угол θ, тем больший, чем быстрее течение. Это задача на сложение скоростей (классический «треугольник скоростей») с переменным течением. Главная идея: из треугольника скоростей $v_0 \sin\theta = \alpha x$; продифференцировав это по времени, получим, что угол растёт равномерно, $\dot{\theta} = \alpha$.

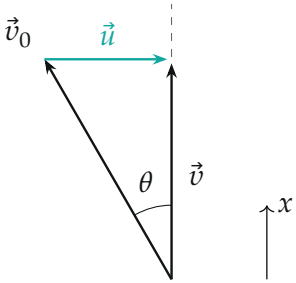
Обозначения. Ось x — поперёк реки от берега старта; L — ширина реки; θ — угол между $\vec{v}_0$ и направлением движения относительно берега (нормалью к берегам); $v = \dfrac{dx}{dt}$ — скорость лодки относительно берега; t_1 — время до середины, T — полное время.

1. Треугольник скоростей. Закон сложения скоростей: скорость лодки относительно берега — сумма скорости относительно воды и скорости воды:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}.$$

$\vec{v}$ направлена поперёк реки (по оси x), $\vec{u}$ — вдоль берега. Проекция на направление течения: $0 = -v_0 \sin\theta + u$; на ось x: $v = v_0 \cos\theta$:

$$v_0 \sin\theta = \alpha x, \qquad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta.$$



Треугольник скоростей (нарисован на середине реки, $u = v_0/2$, $\theta = 30°$): $\vec{v}_0 + \vec{u}$ направлена поперёк реки

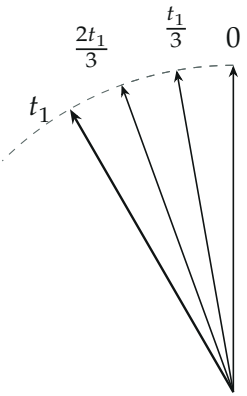
2. Угол растёт равномерно. Возьмём производную по времени от первого равенства, θ и x меняются со временем:

$$v_0 \cos\theta \cdot \dot{\theta} = \alpha \frac{dx}{dt} = \alpha\, v_0 \cos\theta.$$

Сократим на $v_0 \cos\theta \neq 0$:

$$\dot{\theta} = \alpha \quad \Rightarrow \quad \theta = \alpha t \qquad (\theta = 0 \text{ при } t = 0, \text{ у берега } u = 0).$$

Смысл геометрически: за dt конец вектора $\vec{v}_0$ проходит по окружности радиуса v_0 дугу $v_0\, d\theta$; её проекция на направление течения $v_0 \cos\theta\, d\theta$ равна приросту течения $du = \alpha\, dx = \alpha v_0 \cos\theta\, dt$. Множитель $\cos\theta$ одинаков с обеих сторон — отсюда равномерный поворот.



Вектор $\vec{v}_0$ в моменты 0, $t_1/3$, $2t_1/3$, t_1: за равные времена поворачивается на равные углы $10°$ и описывает дугу окружности радиуса v_0

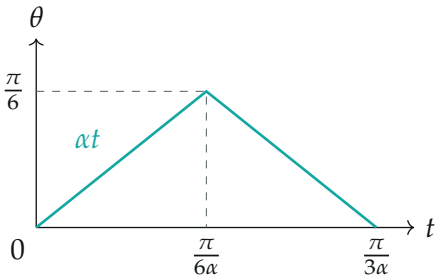
3. Время до середины. На середине $u = \frac{v_0}{2}$, значит $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$:

$$t_1 = \frac{\pi}{6\alpha}.$$

Попутно ширина реки: $\alpha\frac{L}{2} = \frac{v_0}{2}$, $L = \frac{v_0}{\alpha}$.

4. Вторая половина. Там $u = \alpha(L - x)$; то же дифференцирование даёт $\dot\theta = -\alpha$: вектор поворачивается обратно с той же угловой скоростью и при $\theta = 0$ лодка у берега. Время второй половины тоже $\frac{\pi}{6\alpha}$:

$$\theta(t) = \begin{cases} \alpha t, & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{6\alpha}, \\ \dfrac{\pi}{3} - \alpha t, & \dfrac{\pi}{6\alpha} \le t \le \dfrac{\pi}{3\alpha}; \end{cases} \qquad T = 2t_1 = \frac{\pi}{3\alpha}.$$

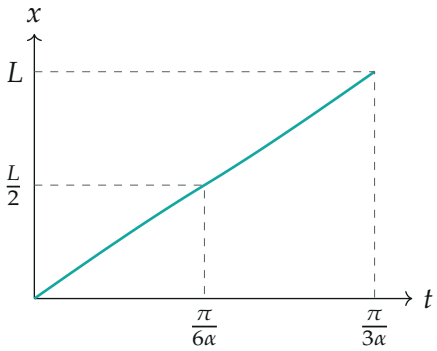


Угол между $\vec{v}_0$ и направлением движения: растёт с угловой скоростью α до середины реки, затем так же убывает

Второй способ: закон движения. Из треугольника скоростей по теореме Пифагора $\dot{x}^2 + (\alpha x)^2 = v_0^2$. Это закон сохранения энергии гармонического осциллятора с частотой α; решение с $x(0) = 0$:

$$x = \frac{v_0}{\alpha}\sin\alpha t, \qquad \dot{x} = v_0\cos\alpha t = v_0\cos\theta \;\Rightarrow\; \theta = \alpha t.$$

Середина $x = \frac{L}{2} = \frac{v_0}{2\alpha}$ достигается при $\sin\alpha t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\pi}{6\alpha}$ — то же.



Закон движения лодки поперёк реки (посчитан): быстрее всего у берегов, где течение не мешает, медленнее всего — на середине, $\dot{x} = v_0\cos 30°$

Обратите внимание. Угол меняется равномерно, хотя ни x, ни скорость лодки равномерно не меняются: $x(t)$ — синусоида. Это не очевидно из условия и получается только после дифференцирования.

Проверка. Размерность: $[\alpha] = \frac{\text{м/с}}{\text{м}} = \text{с}^{-1}$, $\frac{\pi}{3\alpha}$ — секунды. Предел: при медленном течении ($v_0 \gg u$) время было бы $\frac{L}{v_0} = \frac{1}{\alpha}$; у нас $\frac{\pi}{3\alpha} \approx 1{,}05 \cdot \frac{1}{\alpha}$ — чуть больше, так как часть скорости уходит на борьбу с течением.

Ответ. $\theta = \alpha t$ при $0 \le t \le \frac{\pi}{6\alpha}$ (до середины реки), затем $\theta = \frac{\pi}{3} - \alpha t$; лодка на другом берегу через $T = \frac{\pi}{3\alpha}$.