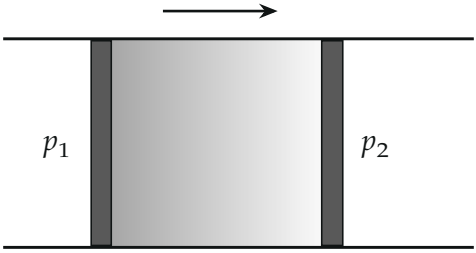
Доставка воды пневмопочтой

Задача 2. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 2] Где-то в космосе, вдали от звёзд, движется по инерции фабрика-звездолёт. В технологических процессах используется вода, которая доставляется к нужному месту порциями массой $m = 288$ г по гладким трубам, площадь поперечного сечения которых постоянна и равна $S = 50$ см^2. Каждая порция содержится между двумя одинаковыми поршнями, масса каждого из которых тоже равна m. Температура порции T при движении в установившемся режиме (колебания поршней относительно друг друга отсутствуют) остаётся неизменной. Движение поршней и порции воды по трубе обеспечивается давлением сжатого газа: «позади» них давление газа p_1 всегда в 1,5 раза больше, а «перед» ними (p_2) — в два раза меньше, чем давление насыщенного водяного пара при температуре T.



Какая часть массы воды в порции при движении в установившемся режиме находится в жидком состоянии? Каково в этом режиме расстояние между поршнями?

Плотность насыщенного водяного пара при температуре T составляет $\varepsilon = 6\,\%$ от плотности жидкой воды, которая при этой температуре равна $\rho \approx 0{,}72$ г/см^3. В вычислениях для простоты можно считать воду несжимаемой, а водяной пар — почти идеальным газом. Ответ для расстояния между поршнями выразите в см с точностью до целого значения.

▲ **Решение. Что происходит.** В невесомости роль «силы тяжести» играет ускорение: вся система (два поршня и вода) разгоняется с одним

ускорением a, и в системе отсчёта трубы, как в стакане на ускоряющемся лифте, давление воды растёт от переднего поршня к заднему. Сзади давление выше давления насыщенного пара p_H — там вода жидкая; спереди ниже — там пар. Граница фаз проходит там, где давление ровно p_H. Это задача на насыщенный пар (фаза определяется сравнением давления с p_H) в «гидростатике с ускорением».

Обозначения. Ось x — по движению, от заднего поршня 1 к переднему поршню 2; p_H — давление насыщенного пара; $p_1 = \frac{3}{2}p_H$, $p_2 = \frac{1}{2}p_H$; p', p'' — давление воды у поршня 1 и у поршня 2; h — толщина слоя жидкости, H — слоя пара, $L = h + H$; $\rho_{\text{п}}$ — плотность пара.

1. Ускорение. Колебаний нет — поршни и вода движутся как одно тело массы $3m$. Второй закон Ньютона для всей системы в проекции на ось x; внутренние силы (давление воды на поршни) сокращаются:

$$3ma = (p_1 - p_2)S = p_H S \quad \Rightarrow \quad a = \frac{p_H S}{3m}.$$

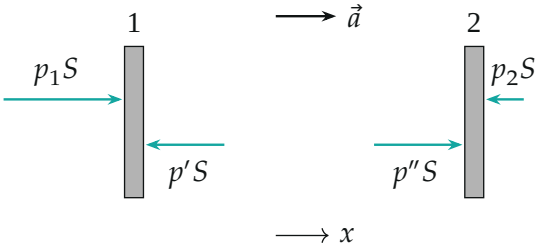
2. Давление у поршней. Второй закон Ньютона для поршня 1: сзади газ толкает с силой $p_1 S$, спереди вода давит назад силой $p'S$:

$$ma = p_1 S - p'S \quad \Rightarrow \quad p' = p_1 - \frac{ma}{S} = \frac{3}{2}p_H - \frac{1}{3}p_H = \frac{7}{6}p_H.$$

Для поршня 2: вода толкает вперёд силой $p''S$, газ спереди — назад силой $p_2 S$:

$$ma = p''S - p_2 S \quad \Rightarrow \quad p'' = p_2 + \frac{ma}{S} = \frac{1}{2}p_H + \frac{1}{3}p_H = \frac{5}{6}p_H.$$

$p' > p_H$ — у поршня 1 вода жидкая (пар при таком давлении сконденсировался бы); $p'' < p_H$ — у поршня 2 вода — пар (жидкость бы выкипела). Значит, в порции два слоя: жидкость сзади, пар спереди, на границе давление p_H.



Силы на поршни (длины стрелок — по величине): $p_1S = \frac{3}{2}$, $p'S = \frac{7}{6}$, $p''S = \frac{5}{6}$, $p_2S = \frac{1}{2}$ в единицах p_HS; на каждый поршень результирующая $\frac{1}{3}p_HS = ma$

3. Слой жидкости. Второй закон Ньютона для жидкого слоя массы ρSh: сзади давит поршень p', спереди — пар с давлением p_H на границе:

$$\rho Sh\,a = (p' - p_H)S = \frac{1}{6}p_HS \quad \Rightarrow \quad \rho Sh = \frac{p_HS}{6a} = \frac{p_HS \cdot 3m}{6p_HS} = \frac{m}{2}.$$

Масса жидкости — ровно половина порции. Толщина слоя

$$h = \frac{m}{2\rho S} = \frac{288}{2 \cdot 0{,}72 \cdot 50} = 4 \text{ см}.$$

Проверим вторым способом: на пар действует разность давлений $p_H - p'' = \frac{1}{6}p_H$ — та же, что на жидкость, а ускорение у них общее; значит, и массы равны, по $\frac{m}{2}$.

4. Слой пара: давление падает с плотностью. Плотность пара не постоянна: пар — почти идеальный газ при постоянной T, по уравнению Менделеева–Клапейрона $\rho_\text{п} \propto p$, а при $p = p_H$ она равна $\varepsilon\rho$:

$$\rho_\text{п} = \varepsilon\rho\,\frac{p}{p_H}.$$

Рассмотрим тонкий слой пара толщиной dx. Второй закон Ньютона для него: разность давлений на его гранях сообщает ему ускорение a:

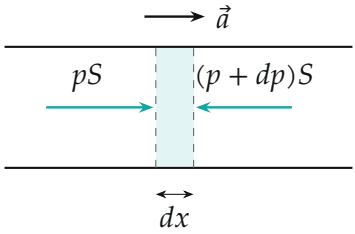
$$\rho_\text{п}S\,dx \cdot a = -S\,dp \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{p_H}{\varepsilon\rho a}\,\frac{dp}{p}.$$

Сложим такие слои от границы фаз ($p = p_H$) до поршня 2 ($p = \frac{5}{6}p_H$):

$$H = \frac{p_H}{\varepsilon\rho a}\ln\frac{p_H}{\frac{5}{6}p_H} = \frac{3m}{\varepsilon\rho S}\ln\frac{6}{5}.$$

Числа: $\frac{m}{\rho S} = \frac{288}{0{,}72\cdot 50} = 8$ см,

$$H = \frac{3\cdot 8}{0{,}06}\ln 1{,}2 = 400\cdot 0{,}182 \approx 72{,}9 \text{ см}.$$

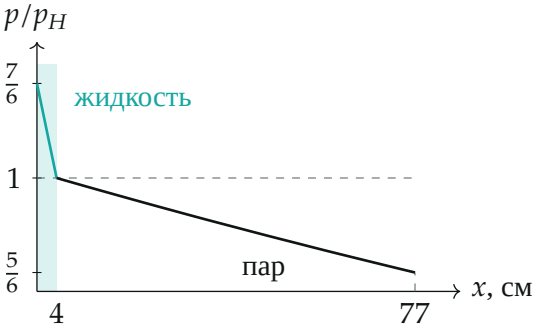


Тонкий слой пара: $dp < 0$, сзади давление больше, слой разгоняется вперёд

5. Расстояние между поршнями. Толщина поршней в задаче не дана, расстояние — между их внутренними гранями:

$$L = h + H = \frac{m}{2\rho S}\left(1 + \frac{6}{\varepsilon}\ln\frac{6}{5}\right) = 4 + 72{,}9 \approx 77 \text{ см}.$$

Без интегрирования: давление в паре падает всего на $\frac{1}{6}$, поэтому можно взять среднее давление $\bar{p} = \frac{11}{12}p_H$ и считать плотность постоянной: $H \approx \frac{p_H}{\varepsilon\rho a}\cdot\frac{p_H/6}{\bar{p}} = 400\cdot\frac{2}{11} = 72{,}7$ см, $L \approx 77$ см — то же в пределах требуемой точности.



Давление вдоль порции (посчитано): в жидкости — линейно и круто (плотность велика), в паре — почти линейно и полого; излом — на границе фаз, где $p = p_H$

Обратите внимание. Пар нельзя считать слоем постоянной плотности $\varepsilon\rho$ с крайним давлением: с p_H получится $H = 66{,}7$ см и $L \approx 71$ см, с $\frac{5}{6}p_H$ — $L \approx 84$ см. Нужна плотность при среднем давлении или интеграл. Слой жидкости (4 см) тоже отбрасывать нельзя: это 5% ответа.

Проверка. Масса пара по нашему профилю: $\int \rho_\text{п} S\,dx = \frac{S}{a}\int dp = \frac{S}{a}\cdot\frac{p_H}{6} = \frac{m}{2}$ — вместе с жидкостью ровно m. Размерность $\frac{m}{\rho S}$ — $\frac{\text{г}}{\text{г/см}^3\cdot\text{см}^2}$ = см. Предел: при $\varepsilon \to 1$ (пар плотный, как жидкость) $H \to 24\ln 1{,}2 \approx 4{,}4$ см, почти как h — массы $\frac{m}{2}$ занимают почти равные объёмы.

Ответ. В жидком состоянии половина массы воды (50%); $L = \dfrac{m}{2\rho S}\left(1 + \dfrac{6}{\varepsilon}\ln\dfrac{6}{5}\right) \approx 77$ см.