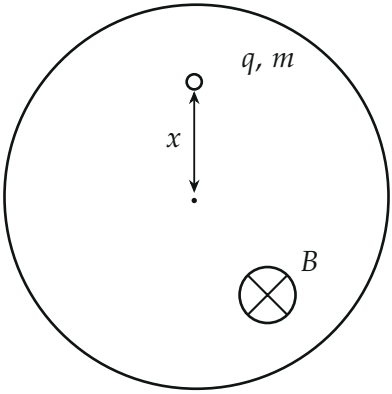
Полетели

Задача 3. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 3] В вакууме в невесомости между круглыми полюсами электромагнита на расстоянии x от оси магнита покоится частица массы m и заряда q. Сначала магнитное поле равно нулю. Затем за малый промежуток времени индукция магнитного поля увеличивается до значения B_0 и поддерживается постоянной в течение времени $\tau < \pi m/(qB_0)$, после чего очень быстро уменьшается до нуля.



1. Почему частица приходит в движение? Опишите качественно траекторию частицы.
2. С какой скоростью движется частица после включения магнитного поля?
3. С какой скоростью движется частица после выключения магнитного поля?
4. На каком минимальном расстоянии от оси магнита проходит траектория частицы?
5. Через какое время от момента включения поля частица окажется на минимальном расстоянии от оси магнита?

Магнитное поле в пределах полюсов можно считать однородным. Перемещением частицы за время включения и выключения поля можно пренебречь.

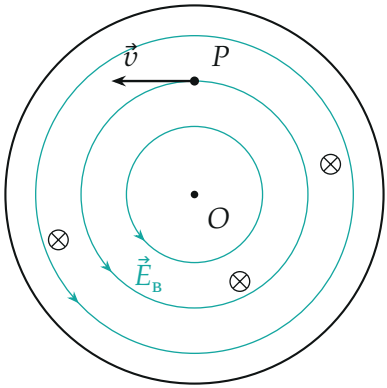
▲ **Решение. Что происходит.** Постоянное магнитное поле покоящуюся частицу не сдвинет: сила Лоренца $q[\vec{v} \times \vec{B}]$ при $v = 0$ равна нулю. Но быстро *меняющееся* поле порождает вихревое электрическое поле (закон электромагнитной индукции), и оно-то толкает частицу. Задача в три этапа: толчок при включении → движение по окружности в постоянном поле → второй толчок при выключении. Главная идея: оба толчка направлены по касательной к окружности с центром на оси, и их величины пропорциональны расстоянию до оси.

Обозначения. O — ось магнита; P — начальное положение частицы; D — центр окружности, по которой частица движется в поле; C — точка, где поле выключают; v — скорость после включения, $\Delta\vec{v}_1$ — приращение скорости при выключении, u — итоговая скорость; $\omega = \frac{qB_0}{m}$, $\alpha = \omega\tau$. Считаем $q > 0$, поле направлено от нас.

Пункт 1. Почему частица движется. По симметрии линии вихревого поля — окружности с центром на оси. Закон электромагнитной индукции для окружности радиуса x: ЭДС равна скорости изменения магнитного потока через неё,

$$2\pi x\, E_{\text{в}} = \pi x^2 \frac{dB}{dt} \quad \Rightarrow \quad E_{\text{в}} = \frac{x}{2}\frac{dB}{dt}.$$

Поле $E_{\text{в}}$ направлено по касательной к этой окружности, и частица получает толчок перпендикулярно радиусу OP. По правилу Ленца при нарастании поля «от нас» вихревое поле направлено против часовой стрелки — туда и полетит положительная частица.



При нарастании поля (от нас, ⊗) вихревое электрическое поле — окружности вокруг оси; частица в P получает скорость по касательной

Траектория качественно: при включении — толчок по касательной, затем в постоянном поле — дуга окружности (сила Лоренца перпендикулярна скорости), при выключении — новый толчок, после чего поля нет и частица летит по прямой.

Пункт 2. Скорость после включения. Второй закон Ньютона для частицы за малое время dt включения (перемещением пренебрегаем, x постоянно; сила Лоренца за малое время включения импульса почти не даёт, так как v ещё мала):

$$m\,dv = qE_{\text{в}}\,dt = \frac{qx}{2}\,dB.$$

Складываем за всё включение, пока B растёт от 0 до B_0:

$$v = \frac{qxB_0}{2m}.$$

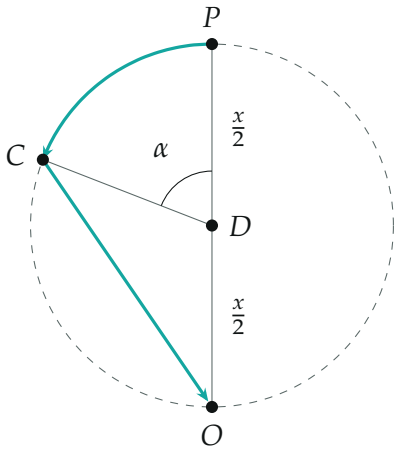
3. Движение в постоянном поле. Сила Лоренца перпендикулярна скорости, частица идёт по окружности. Второй закон Ньютона в проекции на нормаль:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB_0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{qB_0} = \frac{x}{2}, \qquad T = \frac{2\pi m}{qB_0}.$$

Скорость в P перпендикулярна OP, центр D лежит на OP на расстоянии $\frac{x}{2}$ от P — это середина OP. Окружность проходит через ось O! За время $\tau < \frac{\pi m}{qB_0} = \frac{T}{2}$ частица проходит дугу с центральным углом $\alpha = \omega\tau < \pi$ — меньше половины окружности, до оси не доходит.

Расстояние до оси в точке C: треугольник ODC равнобедренный ($DO = DC = \frac{x}{2}$), угол при D равен $\pi - \alpha$, поэтому

$$OC = 2 \cdot \frac{x}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = x\cos\frac{\alpha}{2}.$$



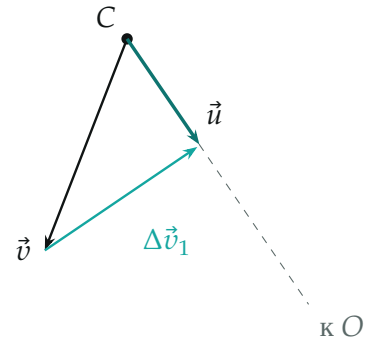
Траектория (посчитана при $\alpha = 1{,}2$): дуга PC окружности с центром D — серединой OP, затем прямая CO через ось

Пункт 3. Скорость после выключения. При быстром выключении поле убывает, вихревое поле направлено по часовой стрелке, а его величина в точке C — по той же формуле с расстоянием OC. Приращение скорости перпендикулярно OC:

$$\Delta v_1 = \frac{q \cdot OC \cdot B_0}{2m} = v \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Разложим скорость $\vec{v}$ в точке C (касательная к окружности, перпендикулярна DC) на составляющие вдоль CO и перпендикулярно CO. Угол между DC и CO равен $\frac{\alpha}{2}$ (углы при основании равнобедренного ODC равны $\frac{\pi-(\pi-\alpha)}{2}$), поэтому составляющая $\vec{v}$ поперёк CO равна $v\cos\frac{\alpha}{2}$ и направлена против часовой стрелки — ровно столько и в противоположную сторону даёт $\Delta\vec{v}_1$. Она гасится, остаётся составляющая вдоль CO:

$$u = v\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{qxB_0}{2m}\sin\frac{qB_0\tau}{2m}.$$

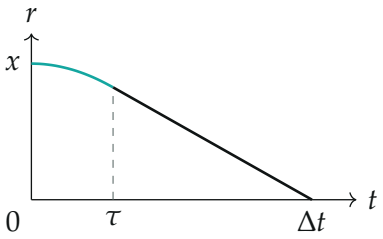


Скорости в точке C (длины — по величине при $\alpha = 1{,}2$): $\vec{u} = \vec{v} + \Delta\vec{v}_1$ направлена точно на ось O

Пункт 4. Минимальное расстояние. После выключения поля сил нет, частица летит по прямой CO — через ось. Минимальное расстояние до оси равно нулю при любых x и τ.

Пункт 5. Время до оси. Дуга PC занимает τ, затем прямая CO с постоянной скоростью u:

$$\Delta t = \tau + \frac{OC}{u} = \tau + \frac{x\cos\frac{\alpha}{2}}{\frac{qxB_0}{2m}\sin\frac{\alpha}{2}} = \tau + \frac{2m}{qB_0}\operatorname{ctg}\frac{qB_0\tau}{2m}.$$



Расстояние до оси от времени (посчитано при $\alpha = 1{,}2$): $r = x\cos\frac{\omega t}{2}$ на дуге, затем линейно до нуля

Обратите внимание. Скорость $v = \frac{qxB_0}{2m}$ не зависит от того, как быстро включали поле: важно только итоговое B_0. Радиус $R = \frac{x}{2}$ тоже от B_0 не зависит — поэтому окружность всегда проходит через ось.

Проверка. Численное интегрирование уравнения движения (python, $\alpha = 1{,}2$, включение и выключение за 10^{-3} от $\frac{m}{qB_0}$) даёт итоговую скорость 0,2825 против формулы 0,2823 (в единицах $\frac{qxB_0}{m}$), направление — точно на ось, время до оси 4,121 против 4,123. Пределы: при $\tau \to 0$ $u \to 0$ — выключение сразу гасит скорость, частица остаётся почти на месте ($\Delta t \to \infty$); при $\tau \to \frac{\pi m}{qB_0}$ $OC \to 0$ — частица выключается прямо у оси, $\Delta t \to \tau$.

Ответ. 1) меняющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, оно разгоняет частицу; траектория — дуга окружности радиуса $\frac{x}{2}$, проходящей через ось, затем прямая через ось; 2) $v = \dfrac{qxB_0}{2m}$; 3) $u = \dfrac{qxB_0}{2m}\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\alpha = \dfrac{qB_0\tau}{m}$; 4) $r_{\min} = 0$; 5) $\Delta t = \tau + \dfrac{2m}{qB_0}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.