Эффект Холла

Задача 4. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 4] «Эффект Холла».

Электроны являются носителями тока в металлах и полупроводниках n-типа. Если образец с током (прямоугольный кусочек плёнки полупроводника n-типа) помещён в магнитное поле и через него протекает ток, то на движущиеся электроны действует сила Лоренца $F = evB$, перпендикулярная скорости электрона и вектору магнитной индукции. Здесь v — средняя скорость дрейфа электронов, связанная с током I и пропорциональная напряжённости электрического поля E в направлении тока: $v = \mu E$, где μ — подвижность электронов. В установившемся режиме напряжённость поперечного поля $E_x = vB$.

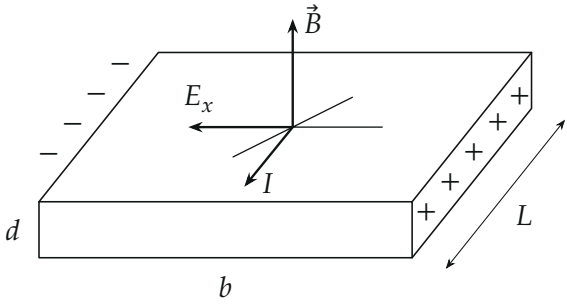

Рис. 1. Образец в магнитном поле (рисунок условия).

Источник с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В и малым внутренним сопротивлением создаёт ток; $B = 1{,}0$ Тл. Переменным резистором r меняют ток, вольтметром измеряют напряжение U_x между боковыми гранями. Размеры образца: толщина $d = 1{,}0$ мкм, ширина $b = 5{,}0$ мм, длина $L = 1{,}0$ см, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

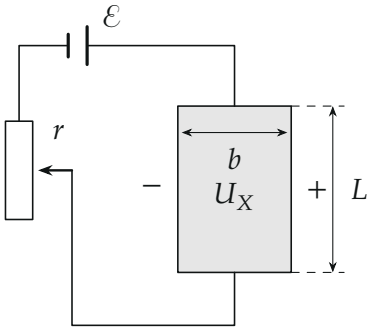

Рис. 2. Схема опыта (рисунок условия).

Зависимость U_x от сопротивления r (кОм, В): $r = 2{,}5$: $U_x = 1{,}2$; 2,0: 1,4; 1,5: 1,6; 1,0: 1,8; 0,5: 2,1; 0,0: 2,5.

1. Выразите U_x через силу тока I в образце, концентрацию n электронов проводимости и величины $\mathcal{E}$, B, d, b, L, e.
2. Выразите сопротивление R и удельное сопротивление ρ образца через его размеры, подвижность μ и концентрацию n.
3. Используя п. 1 и 2, выразите U_x через n, μ, r и величины из описания.
4. По графическому анализу данных определите: а) концентрацию n; б) подвижность μ; в) удельное сопротивление ρ. Опишите способ обработки.

▲ **Решение. Что происходит.** Ток вдоль образца — это электроны, дрейфующие со средней скоростью v. Сила Лоренца сносит их к одной боковой грани, там копится минус, на противоположной — плюс; появляется поперечное поле E_x, и сноса больше нет, когда электрическая сила уравновешивает магнитную. Напряжение Холла пропорционально току, а ток задаёт закон Ома для всей цепи — так U_x связано с r. Это задача-псевдоэксперимент: зависимость надо привести к прямой и по наклону и отрезку на оси найти n и μ.

Обозначения. Ось x — поперёк образца вдоль ширины b, ось y — вдоль длины L (по току направлена против y), ось z — по $\vec{B}$ (рис. 3). v — скорость дрейфа, $S = bd$ — площадь поперечного сечения, U — напряжение на образце вдоль тока, R — его сопротивление.

Пункт 1.

1. Ток через скорость дрейфа. За время dt через сечение $S = bd$ проходят электроны из объёма $bd\,v\,dt$, их заряд $e\,n\,bd\,v\,dt$. Отсюда

$$I = envbd, \qquad v = \frac{I}{enbd}.$$

2. Равновесие электрона поперёк образца. Второй закон Ньютона для электрона в проекции на ось x в установившемся режиме (поперёк он больше не смещается): сила Лоренца evB к грани с минусом уравновешена силой eE_x со стороны поля зарядов граней (рис. 3):

$$eE_x = evB \quad \Rightarrow \quad E_x = vB.$$

Поле поперёк однородно, грани — на расстоянии b, поэтому

$$U_x = E_x b = vBb = \frac{IB}{end}.$$

Ширина b сократилась: напряжение Холла зависит только от толщины плёнки — поэтому её и делают тонкой.

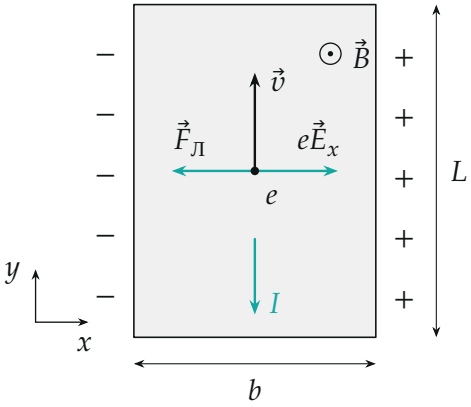

Рис. 3. Вид на образец сверху, $\vec{B}$ — к нам. Ток I идёт вниз, электроны дрейфуют вверх со скоростью $\vec{v}$; сила Лоренца сносит их влево, пока поле зарядов граней не даст равную силу $e\vec{E}_x$ вправо.

Направление проверим по правилу: $\vec{F} = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$, $\vec{v} \parallel +y$, $\vec{B} \parallel +z$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$, значит сила на электрон — по $-x$: минус копится на левой грани, как на рис. 1.

Пункт 2.

3. Сопротивление через подвижность. Вдоль тока поле однородно: $E = U/L$. По определению подвижности $v = \mu E = \mu U/L$, и по шагу 1

$$I = enbd\,\mu\frac{U}{L} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U}{I} = \frac{L}{en\mu bd}.$$

Сравнив с $R = \rho\dfrac{L}{bd}$, получаем

$$\rho = \frac{1}{en\mu}.$$

Пункт 3.

4. Закон Ома для всей цепи. Внутреннее сопротивление источника мало, вольтметр тока почти не берёт, поэтому весь ток идёт через резистор и образец последовательно (рис. 4):

$$\mathcal{E} = I(r + R).$$

Подставим $I = \dfrac{endU_x}{B}$ из шага 2 и R из шага 3:

$$\mathcal{E} = \frac{endU_x}{B}\left(r + \frac{L}{en\mu bd}\right) \quad \Rightarrow \quad U_x = \frac{\mathcal{E}B}{end\,r + \dfrac{L}{\mu b}},$$

или в линейном по r виде

$$\frac{\mathcal{E}B}{U_x} = end \cdot r + \frac{L}{\mu b}.$$

Величина $Y = \mathcal{E}B/U_x$ имеет размерность Тл и растёт с r по прямой: наклон $k = end$ даёт концентрацию, отрезок на оси $Y_0 = L/(\mu b)$ —

подвижность.

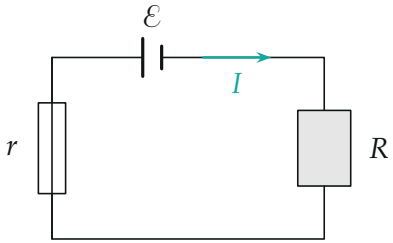

Рис. 4. Эквивалентная схема: образец вдоль тока — сопротивление R, последовательно с r.

Пункт 4.

5. Обработка. Для каждой строки таблицы считаем $Y = \mathcal{E}B/U_x$ (при $\mathcal{E}B = 10$ В·Тл):

r, кОм	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
U_x, В	2,5	2,1	1,8	1,6	1,4	1,2
Y, Тл	4,00	4,76	5,56	6,25	7,14	8,33

Точки ложатся на прямую (рис. 5). Прямую проводим методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\Delta Y}{\Delta r} = 1{,}69 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{Тл}}{\text{Ом}}, \qquad Y_0 = 3{,}90\ \text{Тл}.$$

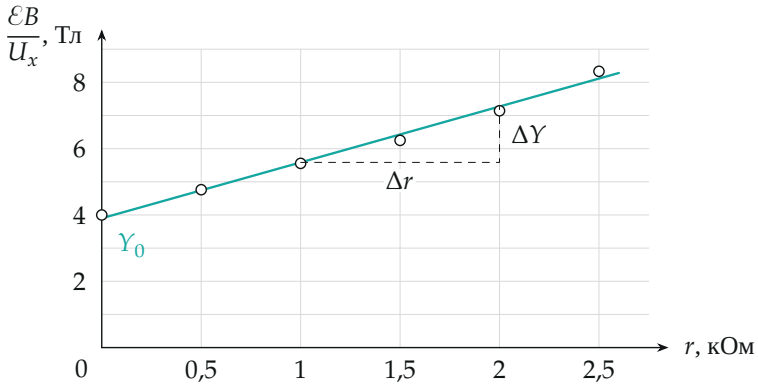

Рис. 5. Линеаризованные данные: $\mathcal{E}B/U_x$ от r. Прямая — по методу наименьших квадратов; наклон даёт end, отрезок Y_0 на оси — $L/(\mu b)$.

6. Ответы пункта 4.

а) Концентрация из наклона $k = end$:

$$n = \frac{k}{ed} = \frac{1{,}69 \cdot 10^{-3}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-6}}\ \text{м}^{-3} \approx 1{,}1 \cdot 10^{22}\ \text{м}^{-3}.$$

б) Подвижность из отрезка $Y_0 = L/(\mu b)$:

$$\mu = \frac{L}{bY_0} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-2}}{5{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}90}\ \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \approx 0{,}51\ \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}.$$

в) Удельное сопротивление из пункта 2:

$$\rho = \frac{1}{en\mu} = \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}05 \cdot 10^{22} \cdot 0{,}51}\ \text{Ом} \cdot \text{м} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Ом} \cdot \text{м}.$$

Обратите внимание. Строить надо не $U_x(r)$ — это гипербола, — а $1/U_x$ от r: только прямая позволяет разделить два неизвестных, n сидит в наклоне, μ — в отрезке на оси. У организаторов отрезок проведён «на глаз», 4,1 Тл, и $\mu \approx 0{,}49$ м^2/(В·с); оба значения — в пределах точности данных (по критериям $\mu = 0{,}47$–$0{,}51$).

Проверка. Размерности: $[IB/(end)] = \dfrac{\text{А} \cdot \text{Тл}}{\text{Кл} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{м}} = \text{Тл} \cdot \dfrac{\text{м}^2}{\text{с}} = \text{В}$; $[1/(en\mu)] = \dfrac{1}{\text{Кл} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})} = \text{Ом} \cdot \text{м}$. Второй способ: сопротивление образца $R = Y_0/(end) = 3{,}90/(1{,}69 \cdot 10^{-3})$ Ом $\approx 2{,}3$ кОм, и при $r = 0$ ток $I = \mathcal{E}/R \approx 4{,}3$ мА даёт $U_x = IB/(end) = 4{,}3 \cdot 10^{-3}/(1{,}69 \cdot 10^{-3})$ В $\approx 2{,}6$ В — как в таблице (2,5 В). Смысл: по одному графику Холла и закона Ома разделяются «сколько носителей» и «насколько легко они движутся».

Ответ. 1) $U_x = \dfrac{IB}{end}$; 2) $R = \dfrac{L}{en\mu bd}$, $\rho = \dfrac{1}{en\mu}$; 3) $U_x = \dfrac{\mathcal{E}B}{end\,r + L/(\mu b)}$, то есть $\dfrac{\mathcal{E}B}{U_x} = end\,r + \dfrac{L}{\mu b}$; 4) а) $n \approx 1{,}1 \cdot 10^{22}$ м$^{-3}$;

б) $\mu \approx 0{,}51$ м^2/(В·с); в) $\rho \approx 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ Ом·м.