Разгон при отключённом источнике

Задача 5. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 5] «Разгон при отключённом источнике».

Две одинаковые проводящие оболочки в форме цилиндров с малыми отверстиями на общей оси образуют конденсатор ёмкостью C. В центре левой оболочки удерживают шарик с зарядом q. Суммарный заряд всей системы, включая заряд шарика, равен нулю. Конденсатор заряжают, подключив к источнику с напряжением U, затем отключают от источника и отпускают шарик. Шарик начинает двигаться вдоль оси и, пролетев через отверстия, попадает внутрь правой оболочки. Какую кинетическую энергию будет иметь шарик в центре правой оболочки? При каком заряде шарика эта энергия максимальна и чему она равна? Выделением тепла из-за тока в оболочках можно пренебречь. Поле тяжести не учитывайте.

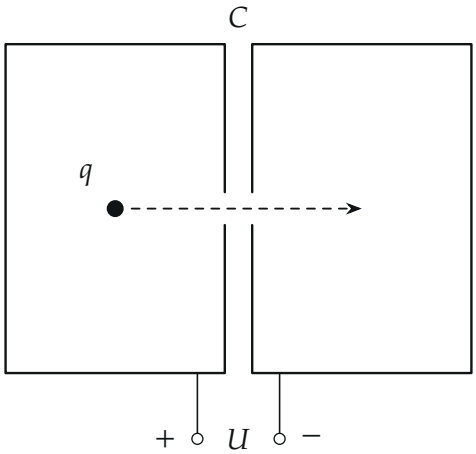

Рис. 1. Рисунок условия: шарик в центре левой оболочки, пунктир — его путь.

▲ **Решение.** **Что происходит.** Пока шарик внутри оболочки, его поле целиком закрыто экранирующим зарядом $-q$ на внутренней поверхности этой оболочки: снаружи шарика «не видно». Перелетев в правую

оболочку, шарик уносит с собой экранирующий заряд — теперь $-q$ оказывается на внутренней поверхности правой оболочки, а у левой этот заряд освобождается на внешнюю поверхность. Источник отключён, поэтому заряд каждой оболочки сохраняется, и заряд конденсатора уменьшается на q. Убыль энергии конденсатора и есть кинетическая энергия шарика. Это задача на закон сохранения энергии в системе с отключённым источником: заряды оболочек постоянны, напряжение меняется.

Обозначения. $Q_0 = CU$ — заряд конденсатора после зарядки (на внешних, обращённых друг к другу поверхностях оболочек), Q — после перелёта шарика, V — напряжение в конце, K — кинетическая энергия шарика в центре правой оболочки. Левая оболочка подключена к «+», будем считать $q > 0$.

1. Заряды в начале. Внутри металла оболочки поле равно нулю, поэтому на её внутренней поверхности собирается заряд $-q$ — он полностью закрывает поле шарика. Сумма зарядов всей системы равна нулю: шарик q и экран $-q$ в сумме дают ноль, значит, заряды внешних поверхностей двух оболочек равны по модулю и противоположны. Источник напряжения U даёт им $\pm Q_0 = \pm CU$ (рис. 2). Полный заряд левой оболочки и правой:

$$Q_л = CU - q, \qquad Q_п = -CU.$$

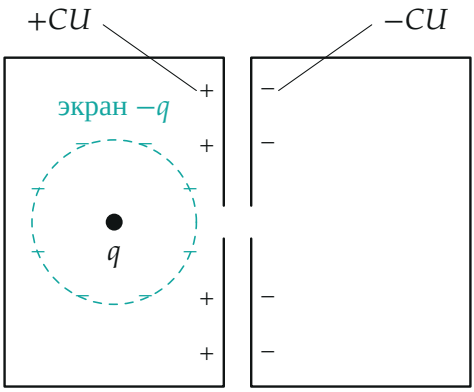

Рис. 2. До старта: поле шарика закрыто экраном $-q$ на внутренней поверхности левой оболочки (бирюзовый пунктир — условно); заряды конденсатора

$\pm CU$ сидят на обращённых друг к другу стенках.

2. Заряды в конце. Источник отключён, проводящие оболочки друг с другом не соединены — заряд каждой оболочки сохраняется. Шарик теперь в центре правой оболочки, и экран $-q$ — на её внутренней поверхности. Тогда на внешней поверхности правой оболочки остаётся $-CU-(-q)=-(CU-q)$, а у левой весь заряд $CU-q$ — снаружи (рис. 3). Заряд и напряжение конденсатора стали

$$Q=CU-q, \qquad V=\frac{Q}{C}=U-\frac{q}{C}.$$

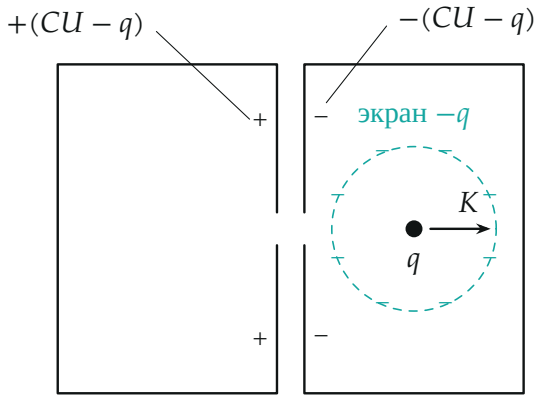

Рис. 3. В конце: экран $-q$ «переехал» вместе с шариком в правую оболочку, заряд конденсатора уменьшился до $CU-q$.

3. Энергия. Энергия системы складывается из двух независимых частей. Первая — энергия поля шарика с его экраном: она сосредоточена внутри оболочки и одинакова в начале и в конце, потому что оболочки одинаковы и шарик оба раза в центре. Вторая — энергия конденсатора $Q^2/(2C)$: поле шарика и экрана снаружи оболочки равно нулю, и на распределение внешних зарядов шарик не влияет. Тепла нет, источник отключён и работы не совершает, поэтому закон сохранения энергии системы «оболочки + шарик» между началом и концом:

$$\frac{(CU)^2}{2C}=\frac{(CU-q)^2}{2C}+K.$$

Отсюда

$$K = \frac{CU^2}{2} - \frac{(CU - q)^2}{2C} = qU - \frac{q^2}{2C}.$$

$K > 0$ при $0 < q < 2CU$ — тогда шарик действительно долетает до центра правой оболочки.

4. Максимум. $K(q)$ — парабола ветвями вниз (рис. 4) с нулями $q = 0$ и $q = 2CU$, её вершина посередине:

$$q^* = CU, \qquad K_{\max} = CU \cdot U - \frac{C^2U^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}.$$

При $q = CU$ напряжение в конце $V = U - q/C = 0$: конденсатор разряжен полностью, и вся его энергия перешла шарику — больше взять неоткуда.

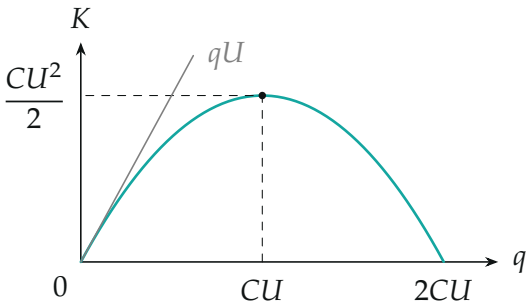

Рис. 4. Энергия шарика $K(q) = qU - q^2/(2C)$ (бирюзовая) и «наивный» ответ qU (серая прямая). Максимум $CU^2/2$ — при $q = CU$.

Обратите внимание. Ответ $K = qU$ («заряд прошёл разность потенциалов U») неверен: источник отключён, и пока шарик перелетает, напряжение падает от U до $U - q/C$. Поправка $-q^2/(2C)$ — ровно этот спад.

Проверка. Размерность: $[qU] = [q^2/C] =$ Дж. Второй способ: перелёт шарика переносит заряд q через конденсатор, напряжение при этом линейно по перенесённому заряду падает от U до $U - q/C$, и работа

поля — заряд на среднее напряжение:

$$K = q \cdot \frac{U + (U - q/C)}{2} = qU - \frac{q^2}{2C},$$

то же самое. Предел: при малом q напряжение почти не меняется, и $K \approx qU$ — как при подключённом источнике. Смысл: заряженный шарик работает как «разряжающий проводник», и наибольшую энергию он забирает, когда полностью разряжает конденсатор.

Ответ. $K = qU - \dfrac{q^2}{2C}$; энергия максимальна при $q = CU$ и равна $K_{\max} = \dfrac{CU^2}{2}$.