Нелинейная цепь

Задача 6. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 6] «Нелинейная цепь».

Электрическая цепь состоит из идеального источника с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В, резистора сопротивлением $R = 5$ Ом, катушки индуктивностью $L = 20$ мГн с нулевым сопротивлением и нелинейного элемента, вольтамперная характеристика которого представлена на рисунке ($I_0 = 3$ А). Изначально ключ разомкнут, тока в цепи нет. Какое количество теплоты выделится на резисторе через большой промежуток времени после замыкания ключа?

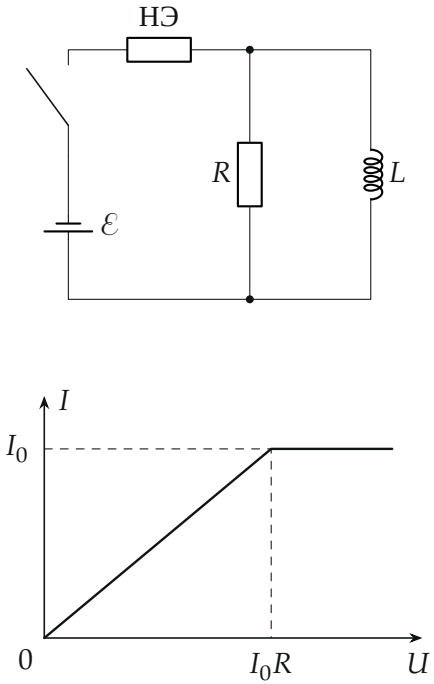

Рис. 1. Схема цепи и вольтамперная характеристика нелинейного элемента (рисунки условия).

▲ **Решение. Что происходит.** В момент замыкания ток катушки равен нулю, и весь ток идёт через резистор. Затем ток катушки растёт, напряжение на параллельных R и L падает, а ток через нелинейный элемент

растёт. Пока он меньше I_0, элемент ведёт себя как резистор R (наклон ВАХ $I_0/(I_0R) = 1/R$). Когда ток дошёл до I_0, элемент становится источником постоянного тока, и дальше ток I_0 просто перетекает из резистора в катушку. Это задача на нелинейный элемент — перебор режимов: в каждом режиме цепь линейна, тепло считаем через заряд, прошедший через резистор.

Обозначения. I — ток через нелинейный элемент (он же через источник), I_L — ток катушки, U — напряжение на резисторе и катушке (они параллельны), q — заряд, прошедший через резистор с момента замыкания (рис. 2).

1. Связь тока катушки с зарядом через резистор. Катушка и резистор параллельны, напряжение у них одно: $L\dfrac{dI_L}{dt} = U$. За малое время dt через резистор проходит $dq = \dfrac{U}{R}\,dt$, отсюда

$$L\,dI_L = U\,dt = R\,dq \quad \Rightarrow \quad I_L = \frac{R}{L}\,q.$$

Тепло на резисторе за dt — работа тока: $dQ = U\,dq$. Значит, искомая теплота — площадь под графиком $U(q)$.

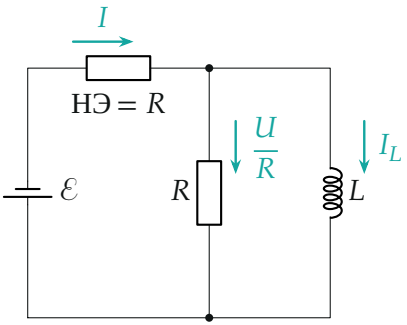

Рис. 2. Режим 1: пока $I < I_0$, нелинейный элемент — резистор R. Ток I делится на ток резистора U/R и ток катушки I_L.

2. Режим 1: элемент — резистор R. Закон Ома для участка с элемен-

том и первое правило Кирхгофа для узла:

$$\mathcal{E} = IR + U, \qquad I = \frac{U}{R} + I_L.$$

Исключим I: $\mathcal{E} = 2U + RI_L$, то есть

$$U = \frac{\mathcal{E} - RI_L}{2}, \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{2R} + \frac{I_L}{2}.$$

В начале $I_L = 0$: $I = \mathcal{E}/(2R) = 2$ А $< I_0$ — режим 1 действительно первый, $U = 10$ В. С ростом I_L ток I растёт и достигает I_0 при

$$I_L^* = 2I_0 - \frac{\mathcal{E}}{R} = 2 \text{ А}, \qquad U^* = \frac{\mathcal{E} - RI_L^*}{2} = R\Big(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0\Big) = 5 \text{ В}.$$

Через резистор к этому моменту прошёл заряд $q^* = \dfrac{L}{R} I_L^* = 8$ мКл (шаг 1). По шагу 1 $U = \dfrac{\mathcal{E}}{2} - \dfrac{R^2}{2L} q$ — линейная функция q, и тепло режима 1 — площадь трапеции (рис. 4):

$$Q_1 = \frac{U(0) + U^*}{2}\, q^* = \frac{10 + 5}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 0{,}06 \text{ Дж}.$$

3. Режим 2: элемент — источник тока I_0. Теперь $I = I_0$ при любом напряжении на элементе не меньше $I_0 R = 15$ В. Проверим: на элементе $\mathcal{E} - U$, а $U \le U^* = 5$ В, поэтому $\mathcal{E} - U \ge 15$ В — режим держится до конца. Правило Кирхгофа для узла (рис. 3):

$$I_0 = \frac{U}{R} + I_L \quad \Rightarrow \quad U = R\,(I_0 - I_L).$$

Ток катушки растёт до I_0, напряжение падает до нуля; от I_L^* до I_0 через резистор проходит ещё $\Delta q = \dfrac{L}{R}(I_0 - I_L^*) = 4$ мКл, и U снова линейно по

q — от 5 В до нуля. Тепло режима 2 — площадь треугольника:

$$Q_2 = \frac{U^*\Delta q}{2} = \frac{L(I_0 - I_L^*)^2}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0\right)^2 = 0{,}01 \text{ Дж}.$$

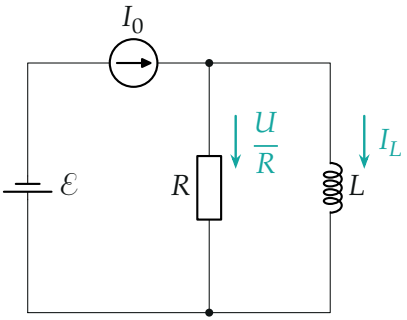

Рис. 3. Режим 2: элемент держит ток I_0, и этот ток перетекает из резистора в катушку.

4. Ответ. После долгого времени $I_L = I_0$, $U = 0$ — ток больше не меняется, тепло не выделяется. Всего

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{L}{2R}\left(\mathcal{E}I_L^* - \frac{R\,I_L^{*2}}{2}\right) + \frac{L}{2}\left(\frac{\mathcal{E}}{R} - I_0\right)^2 = 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}07 \text{ Дж},$$

где первое слагаемое — та же трапеция, записанная через $I_L^* = 2I_0 - \mathcal{E}/R$.

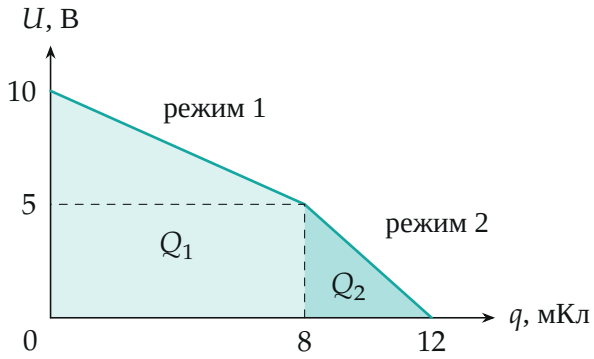

Рис. 4. Напряжение на резисторе от прошедшего через него заряда. Тепло — площадь под графиком: трапеция Q_1 (режим 1) и треугольник Q_2 (режим 2).

Обратите внимание. Ответ «энергия катушки $LI_0^2/2 = 0{,}09$ Дж» не про резистор: тепло выделяется и на нелинейном элементе, а источник совершает работу. Энергию системы считать неудобно — проще прямо тепло на резисторе через $dQ = U\,dq$.

Проверка. Размерность: $[L\,I^2] = \text{Гн} \cdot \text{А}^2 = \text{Дж}$. Второй способ для режима 2 — энергия: элемент с током I_0 отдаёт на участок RL работу $\int UI_0\,dt = I_0\,L\,(I_0 - I_L^*) = 0{,}06$ Дж, энергия катушки растёт на $\frac{L}{2}(I_0^2 - I_L^{*2}) = 0{,}05$ Дж, на резистор остаётся 0,01 Дж — то же. Численное интегрирование уравнений цепи с шагом 10^{-7} с даёт $Q = 0{,}0700$ Дж. Смысл: резистор греется в основном в первые миллисекунды, пока ток катушки мал и почти весь ток идёт через него.

Ответ. $Q = \dfrac{L}{2R}\Big(\mathcal{E}I_L^* - \dfrac{R\,I_L^{*2}}{2}\Big) + \dfrac{L}{2}\Big(\dfrac{\mathcal{E}}{R} - I_0\Big)^2$, где $I_L^* = 2I_0 - \dfrac{\mathcal{E}}{R}$; $Q = 0{,}07$ Дж.