Вспышка в кубе

Задача 7. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 11 класс, задача 7] «Вспышка в кубе».

В кубе из вещества с показателем преломления $n = 2$ точечный источник испустил кратковременную вспышку, свет от которой расходится однородно во всех направлениях. Свет веществом куба не поглощается. Какие значения может принимать доля η энергии вспышки, вышедшей наружу, в зависимости от положения источника внутри куба? Укажите, при каких положениях источника эта доля минимальна, при каких максимальна и чему она равна?

При падении света на границу раздела часть его энергии, зависящая от угла падения, отражается, а часть проходит через границу раздела.

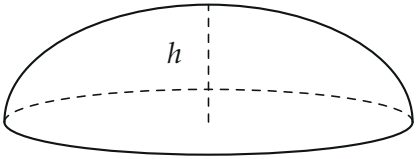

Рис. 1. Сферический сегмент высоты h (рисунок условия).

Примечание: площадь сферического сегмента $S = 2\pi Rh$, где R — радиус сферы, h — высота сегмента.

▲ **Решение. Что происходит.** Грани куба попарно перпендикулярны, поэтому при отражении от любой грани у луча меняет знак только одна проекция направления — на нормаль к этой грани, а модули всех трёх проекций сохраняются. Значит, угол, под которым луч падает на каждую пару граней, у луча один и тот же на всю жизнь, сколько бы он ни отражался. Луч, который падает на какую-то пару граней круче критического угла, будет частично выходить через них при каждом ударе и в итоге выйдет весь (поглощения нет). Луч, который на все три пары падает положе критического угла, отражается полностью и остаётся внутри навсегда. Это задача на полное внутреннее отражение и подсчёт телесного угла.

Обозначения. Оси x, y, z — перпендикулярно граням куба. $\vec{e} = (e_x, e_y, e_z)$ — единичный вектор направления луча, $e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 1$; θ_0 — критический угол полного отражения; Ω — телесный угол.

1. Что сохраняется при отражениях. Закон отражения от грани, перпендикулярной оси x: проекция e_x меняет знак, e_y и e_z не меняются. Так же для двух других пар граней. Поэтому модули $|e_x|$, $|e_y|$, $|e_z|$ одинаковы у луча до и после любого числа отражений (рис. 2), а угол падения на грань x — это всегда угол θ_x с $\cos\theta_x = |e_x|$.

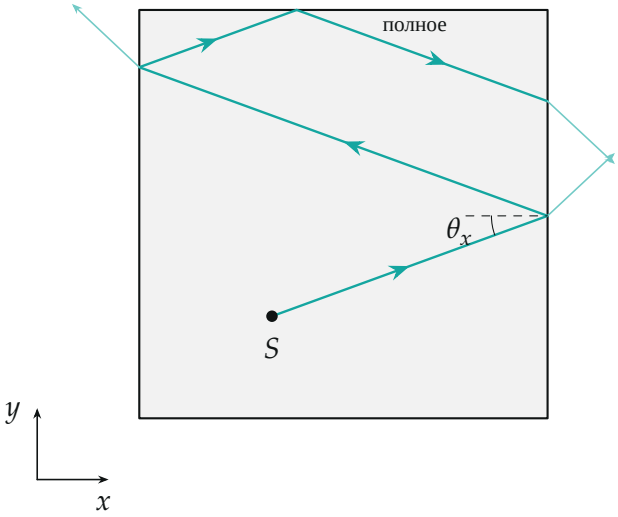

Рис. 2. Сечение куба. Луч из источника S падает на грани x под одним и тем же углом $\theta_x < \theta_0$ — каждый раз часть света выходит (светлые стрелки); на грань y он падает полого и отражается полностью.

2. Критический угол. Закон преломления на выходе из куба в воздух: $n\sin\theta = \sin\beta$. Выход возможен, если $\sin\beta \le 1$, то есть угол падения меньше критического:

$$\sin\theta_0 = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \qquad \theta_0 = 30^\circ.$$

При $\theta < 30^\circ$ часть света отражается, часть выходит; при $\theta > 30^\circ$ — полное отражение (рис. 3).

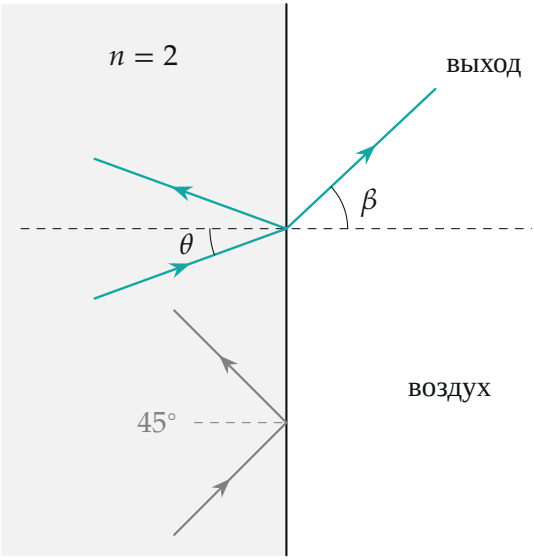

Рис. 3. На грани: луч с $\theta < 30°$ частично выходит под углом β, $\sin\beta = 2\sin\theta$ (показан $\theta = 20°$, $\beta = 43°$); серый луч с $\theta = 45° > 30°$ отражается полностью.

3. Какие лучи выходят. Луч может частично выйти через грани x, если $\theta_x < 30°$:

$$|e_x| > \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $e_y^2 + e_z^2 = 1 - e_x^2 < \frac{1}{4}$, то есть $|e_y|, |e_z| < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$: на гранях y и z такой луч всегда отражается полностью и рано или поздно снова приходит на грань x — под тем же углом θ_x. При каждом ударе о грани x уходит конечная доля оставшейся энергии, поглощения нет, поэтому за много отражений наружу выходит вся энергия этого луча. Условия для разных осей не выполняются одновременно, так что каждый выходящий луч приписан ровно одной паре граней.

Луч, у которого все три $|e_i| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, падает на все грани под углами не меньше 30° и навсегда остаётся внутри.

Обратите внимание: ни в одном условии нет положения источника — только направление луча. Отражения переставляют лишь знаки проекций, а где луч ударится о грань, для выхода неважно.

4. Доля энергии. Свет излучён равномерно по всем направлениям, поэтому доля энергии равна доле телесного угла. Выходят лучи из шести конусов с осями $\pm x$, $\pm y$, $\pm z$ и полууглом $30°$ (рис. 4). Телесный угол одного конуса — площадь сегмента единичной сферы высоты $h = 1 - \cos 30°$:

$$\Omega_1 = 2\pi \cdot 1 \cdot (1 - \cos 30°) = 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}84 \text{ ср}.$$

Конусы не перекрываются (шаг 3), поэтому

$$\eta = \frac{6\Omega_1}{4\pi} = 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}40.$$

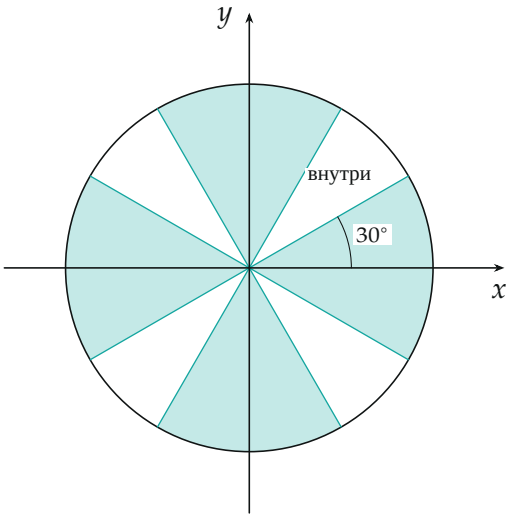

Рис. 4. Направления лучей на сфере (сечение плоскостью xy). Бирюзовые конусы с полууглом $30°$ около осей — свет, который выходит; между ними — лучи, запертые полным отражением.

5. Ответ про положение источника. Доля η от положения источника не зависит: при любом положении она одна и та же, минимальное и максимальное значения совпадают.

Обратите внимание. В условии на сайте был показатель преломления $\sqrt{2}$; у организаторов $n = 2$ (в их решении $\sin\theta_0 = 1/2$). При $n = \sqrt{2}$ тот же ход дал бы конусы с полууглом 45° и $\eta = 3(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \approx 0{,}88$.

Проверка. Размерность: η — отношение телесных углов, безразмерно, $0 < \eta < 1$. Конусы около x и y перекрылись бы, только если $|e_x|$ и $|e_y|$ оба больше $\cos\theta_0$, то есть $2\cos^2\theta_0 < 1$, $\theta_0 > 45°$; у нас 30° — перекрытия нет, и шесть телесных углов складываются честно. Численно: $1 - \sqrt{3}/2 = 0{,}1340$, $\eta = 0{,}402$; розыгрыш 10^6 случайных направлений с проверкой $\max|e_i| > \sqrt{3}/2$ даёт ту же долю 0,402. Смысл: в оптически плотном кубе 60 % света заперто полным отражением навсегда — так «светятся» только грани куба вблизи нормали.

Ответ. $\eta = 3\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 0{,}40 = 40\,\%$ при любом положении источника; минимальная и максимальная доли совпадают.