Леопольд атакует

Задача 1. [ВсОШ 2020/21, региональный этап, 9 класс, задача 1] «Леопольд атакует».

Кот Леопольд, находясь на крыше дома, два раза выстрелил в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями камушками из рогатки. Перед падением на землю скорости камушков были направлены перпендикулярно друг другу. Определите высоту h дома, если известно, что суммарное время полёта камушков $t_0 = 3$ с, а времена их движения отличаются в два раза. С какой скоростью v камушки были выпущены из рогатки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

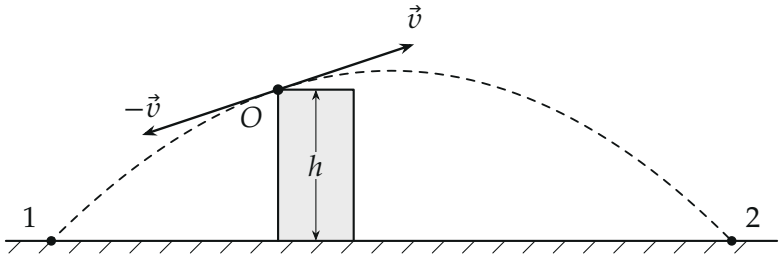

Рис. 1. Поясняющий рисунок (построен по найденным числам): камушки вылетают из точки O со скоростями $\vec{v}$ и $-\vec{v}$; пунктир — траектории.

▲ **Решение. Что происходит.** Это задача на движение тела, брошенного под углом к горизонту, с ускорением $\vec{g}$. Ключевая идея — обратимость движения: если «прокрутить назад» полёт первого камушка, в точке O он будет лететь со скоростью $-\vec{v}$, а ускорение останется $\vec{g}$. Значит, второй камушек (вылетевший со скоростью $-\vec{v}$) движется по той же параболе, что и первый, только в обратную сторону. Обе точки падения лежат на одной параболе на одной высоте — симметрично относительно её вершины.

Обозначения. Ось x — горизонтально вправо, ось y — вертикально вверх. Камушек 2 летит дольше, $t_2 = 2t_1$, камушек 1 — меньше. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — скорости перед падением, u — их модуль, u_x, u_y — модули проекций.

1. Одна парабола на двоих. Продолжим траекторию камушка 2 назад во времени (рис. 2). За время t_1 до броска он был в точке падения камушка 1: камушек 1 проходит этот же участок параболы, только в

обратную сторону, поэтому его скорость в точке падения $\vec{u}_1$ противоположна скорости, которую имел бы там «продолженный» камушек 2. Получается одна парабола: её концы — точки падения на высоте земли, полное время движения по ней

$$t_0 = t_1 + t_2.$$

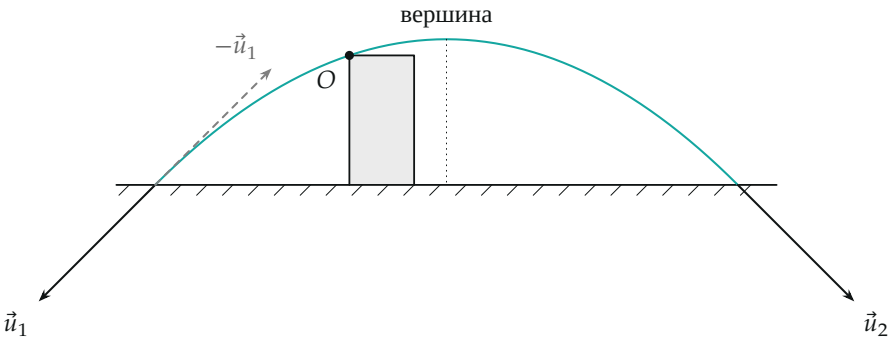

Рис. 2. Камушек 2 и продолженная назад его траектория (бирюза) проходят через обе точки падения; $-\vec{u}_1$ — скорость продолженного камушка 2 в точке падения камушка 1.

2. Скорости при падении — под $45°$**.** Концы параболы на одной высоте симметричны относительно вершины: продолженный камушек 2 в левой точке имеет скорость $(u_x;\, u_y)$ — вверх, в правой $(u_x;\, -u_y)$ — вниз. Тогда

$$\vec{u}_2 = (u_x;\, -u_y), \qquad \vec{u}_1 = -(u_x;\, u_y) = (-u_x;\, -u_y).$$

Модули равны — это видно и из закона сохранения энергии: оба вылетели с одной скоростью с одной высоты. Условие перпендикулярности — скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_y = u_x,$$

т. е. оба камушка падают под углом $\beta = 45°$ к горизонту (рис. 3).

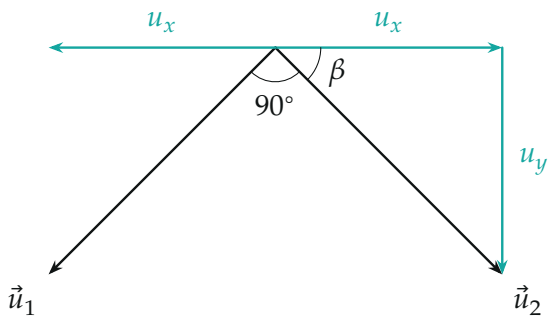

Рис. 3. Скорости при падении: равные модули, проекции $u_x = u_y$, угол $\beta = 45°$, между векторами — 90°.

3. Время полёта по параболе. По оси y движение равноускоренное: $v_y(t) = u_y - gt$, от $+u_y$ в левом конце до $-u_y$ в правом (рис. 4). Полное время

$$t_0 = \frac{2u_y}{g} \quad \Rightarrow \quad u_y = \frac{gt_0}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ м/с}, \qquad u_x = u_y = 15 \text{ м/с}.$$

4. Высота дома. Времена: $t_1 + t_2 = t_0$, $t_2 = 2t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{t_0}{3} = 1$ с, $t_2 = 2$ с. Бросок — через t_1 после левого конца параболы. Перемещение по y от левого конца до точки броска равно h (рис. 4, площадь под графиком $v_y(t)$):

$$h = u_y t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_0}{2} \cdot \frac{t_0}{3} - \frac{g}{2} \cdot \frac{t_0^2}{9} = \frac{gt_0^2}{9} = \frac{10 \cdot 9}{9} = 10 \text{ м}.$$

Проверим другим концом: от броска до правого конца $\Delta y = v_y t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$, где $v_y = u_y - gt_1 = 5$ м/с, т. е. $\Delta y = 5 \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -10$ м — та же высота.

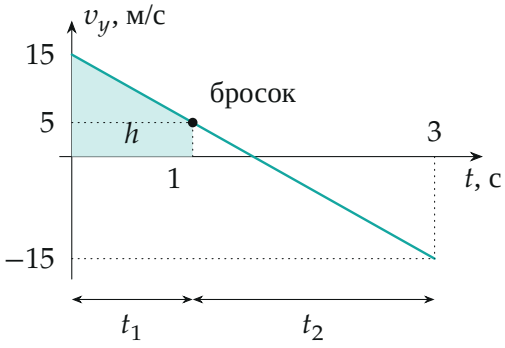

Рис. 4. Проекция скорости на y при движении по общей параболе; площадь под графиком на отрезке t_1 — высота дома h.

5. Скорость вылета. В точке броска (через t_1): $v_x = u_x = 15$ м/с, $v_y = u_y - gt_1 = 5$ м/с. Модуль

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{15^2 + 5^2} = 5\sqrt{10} \approx 15{,}8 \text{ м/с}.$$

В общем виде — из закона сохранения энергии $u^2 = v^2 + 2gh$, где $u^2 = 2u_y^2 = \frac{g^2 t_0^2}{2}$:

$$v = \sqrt{\frac{g^2 t_0^2}{2} - \frac{2g^2 t_0^2}{9}} = gt_0\sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15{,}8 \text{ м/с}.$$

Камушки вылетели под углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx 18^\circ$ к горизонту: один вверх-вправо, другой вниз-влево (рис. 1).

Обратите внимание. Перпендикулярность скоростей при падении сама по себе ничего не дала бы без обратимости движения: именно она связывает два разных полёта в одну параболу, концы которой на одной высоте.

Ответ.

$$h = \frac{gt_0^2}{9} = 10 \text{ м}, \qquad v = gt_0\sqrt{\frac{5}{18}} \approx 15{,}8 \text{ м/с}.$$

Проверка. Размерность: $[gt_0^2] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с}^2 = \text{м}$, $[gt_0] = \text{м/с}$. Второй

способ для h — через другой камушек — дал те же 10 м (п. 4). Камушек 1 за 1 с: $\Delta y = -5 \cdot 1 - 5 \cdot 1^2 = -10$ м — падает именно на землю. Если бы времена были равны ($t_1 = t_2$), бросок пришёлся бы на вершину, и $h = u_y \frac{t_0}{2} - \frac{g}{2}\frac{t_0^2}{4} = \frac{gt_0^2}{8}$ — близко к нашему, как и должно быть.

Ответ. $h = \dfrac{gt_0^2}{9} = 10$ м; $v = gt_0\sqrt{5/18} \approx 15{,}8$ м/с.